Introducción a las formas de Dirichlet y a sus aplicaciones

J. Villa[1]
Universidad Autónoma de Aguascalientes
Departamento de Física y Matemáticas
CIMAT
villa@cimat.mx
jvilla@gina.esfm.ipn.mx

Noviembre del 2000

[1]Este trabajo forma parte del proyecto CONACYT No. 32401E

Contents

Prefacio

En años recientes se ha observado un gran desarrollo de la teoría de formas de Dirichlet. Esto es debido a que las formas de Dirichlet son una herramienta muy útil en el análisis estocástico, sobre todo cuando el espacio de estados es infinito dimensional. Hablando informalmente, una forma de Dirichlet $(\mathcal{E}, D(\mathcal{E}))$ es un objeto analítico que puede servir para construir y estudiar ciertos procesos de Markov. La construcción de un proceso de Markov asociado a una forma de Dirichlet dada, cuando esto es posible, generalmente sigue el siguiente esquema:

$$\boxed{(\mathcal{E}, D(\mathcal{E})) \underset{(1)}{\longrightarrow} (T_t)_{t>0} \underset{(2)}{\longrightarrow} (p_t)_{t>0} \underset{(3)}{\longrightarrow} (X_t)_{t\geq 0},}$$

donde $(T_t)_{t>0}$ es el semigrupo asociado a la forma de Dirichlet $(\mathcal{E}, D(\mathcal{E}))$ y $(p_t)_{t>0}$ es el semigrupo de transiciones de $(X_t)_{t\geq 0}$. Así, una vez que se establece esta relación entre la forma de Dirichlet y el proceso de Markov, entonces se usan las propiedades de la forma de Dirichlet $(\mathcal{E}, D(\mathcal{E}))$ para estudiar el comportamiento del proceso $(X_t)_{t\geq 0}$. Los pasos (1) y (3) usualmente no son difíciles de verificar, sin embargo es el paso (2) el que usualmente cuesta más trabajo, sobre todo cuando se tiene un proceso $(X_t)_{t\geq 0}$ en mente.

El párrafo precedente da, a grandes rasgos, una idea de qué es lo que el lector de esta breve e introductoria monografía de formas de Dirichlet puede esperar. Ahora bien, con el propósito de motivar el estudio de este concepto mencionemos algunas de las aplicaciones. Las aplicaciones que presentamos son dos: La primera es una aplicación clásica a la teoría del potencial, consistente en determinar qué conjuntos no visita un proceso de Markov (conjuntos $\mathcal{E}$-excepcionales) y en la segunda aplicación resolvemos una ecuación diferencial estocástica con espacio de estados infinito dimensional. Más aplicaciones de formas de Dirichlet pueden verse en [ARW 00] o en [S], por ejemplo.

Los conocimientos que necesita el lector para leer esta monografía son sólo algunos elementos de análisis funcional. No hace falta conocer mucho de probabilidad ya que los conceptos que necesitamos son pocos y algunos se definen en el desarrollo de la monografía, más precisamente en la Sección 4.1. Por otra parte, el propósito es dar una idea de qué es una forma de Dirichlet, con que objetos se trabaja y para qué nos puede servir. Y para ser coherentes con la meta expuesta trataremos de enunciar y demostrar los resultados que nos permitan lograr los objetivos antes expuestos. Para una exposición detallada del tema ver los trabajos [MR 92], [F 80], [S], [R 92] o el reciente artículo [Fi 99], sobre los cuales se basan estas notas.

La monografía consta de lo siguiente:

En el Capítulo 1 se introducen los conceptos de forma de Dirichlet, semigrupo, generador, resolvente y el de forma coerciva cerrada. En el Capítulo 2 damos el concepto de cerrabilidad, el cual es muy conveniente para tratar los ejemplos de formas de Dirichlet que vemos en este capítulo. El Capítulo 3 trata de teoría del potencial de formas de Dirichlet. La relación que existe entre formas de Dirichlet y procesos de Markov la veremos en el Capítulo 4 y finalmente en el Capítulo 5 veremos en detalle las dos aplicaciones de formas de Dirichlet que ya hemos mencionado.

Aprovecho la oportunidad para agradecerle a **José Alfredo López Mimbela** la revisión cuidadosa que hizo de esta monografía y la paciencia que tuvo para con un servidor, sinceramente gracias.

J. Villa
28 de Diciembre del 2000

Captulo 1

Formas de Dirichlet

En este capítulo introducimos los conceptos de resolvente, semigrupo, generador, forma coerciva cerrada y el de forma de Dirichlet.

1.1 Resolventes, semigrupos y generadores

Por completes en esta sección daremos las definiciones y relaciones que existen entre resolventes, semigrupos y generadores. Aunque en general trabajaremos en el espacio de Hilbert $L^2(E,\mu)$, los conceptos antes mencionados tienen un mejor marco en un espacio de Banach. Sea pues $(B, ||\cdot||)$ un espacio de Banach sobre el campo $\mathbb{K} := \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$.

Un operador lineal $(L, D(L))$ en B consta de una aplicación lineal L cuyo dominio es un subespacio lineal $D(L) \subset B$ y rango contenido en B. Si no hay confusión se denotará nada más por L a la aplicación lineal $(L, D(L))$. Un operador lineal L en B es acotado (o continuo) si

$$||L|| := \sup\{||Lu|| : u \in B,\ \ ||u|| \leq 1\} < \infty.$$

El operador identidad se denotará por I. Si $\alpha \in \mathbb{K}$, en lugar de escribir αI escribiremos simplemente α.

Definicin 1.1 *Sea $L : D(L) \to B$ un operador lineal. El conjunto resolvente $\rho(L)$ de L se define como el conjunto de los $\alpha \in \mathbb{K}$ tales que $(\alpha - L) : D(L) \to B$ es uno a uno y su inversa $(\alpha - L)^{-1}$ cumple lo siguiente:*

a) $D((\alpha - L)^{-1}) = B$,
b) $(\alpha - L)^{-1}$ *es continua en B.*

Definicin 1.2 *Una familia $(G_\alpha)_{\alpha>0}$ de operadores lineales en B con $D(G_\alpha) = B$, para toda $\alpha > 0$, se llama resolvente de contracciones fuertemente continua en B si*

i) $\lim_{\alpha\to\infty} \alpha G_\alpha u = u$, *para toda $u \in B$. (Continuidad fuerte)*
ii) $||\alpha G_\alpha u|| \leq ||u||$, *para toda $u \in B$ y cada $\alpha > 0$. (Propiedad de contracción)*
iii) $G_\alpha - G_\beta = (\beta - \alpha)G_\alpha G_\beta$, *para cualesquiera $\alpha, \beta > 0$. (Ecuación resolvente)*

Proposicin 1.3 *Sea* $(G_\alpha)_{\alpha>0}$ *una resolvente de contracciones fuertemente continua en* B*. Entonces existe un único operador lineal* $L : D(L) \to B$ *tal que* $]0,\infty[\subset \rho(L)$ *y* $G_\alpha = (\alpha - L)^{-1}$ *para toda* $\alpha > 0$*. Este operador es cerrado y densamente definido.*

Demostracin. De la ecuación resolvente se deduce que $G_\alpha(B)$ es independiente de α. Usando, de nuevo, la ecuación resolvente y la continuidad fuerte de la resolvente se demuestra que G_α es uno a uno. Así, el operador buscado debe cumplir que $D(L) = G_\alpha(B)$ y

$$L = \alpha - G_\alpha^{-1} \quad \text{para toda } \alpha > 0. \tag{1.1}$$

De esta forma L queda determinado. Para verificar la existencia de un tal L hay que mostrar que la definición de L en (1.1) no depende de α, lo cuál se sigue de la Definición 1.2(iii). Ya que G_α es lineal, la relación $D(L) = G_\alpha(B)$ implica que $D(L)$ es denso en B debido a la Definición 1.2(i). Finalmente veamos que L es cerrado. Sean $\alpha > 0$ y $(u_n) \subset D(L)$, tal que $u_n \to u$ y $Lu_n \to v$, cuando $n \to \infty$, en B, para algunas $u, v \in B$. Entonces $\lim_{n\to\infty} G_\alpha u_n = \alpha u - v$ y así $u = \lim_{n\to\infty} G_\alpha(\alpha - L)u_n = G_\alpha(\alpha u - v)$, es decir $u \in G_\alpha(B) = D(L)$ y $v = \alpha u - (\alpha - L)u = Lu$. ■

Definicin 1.4 *El operador* L *de la Proposición 1.3 se llama generador de la resolvente* $(G_\alpha)_{\alpha>0}$.

Definicin 1.5 *Una familia* $(T_t)_{t>0}$ *de operadores lineales en* B*, con* $D(T_t) = B$*, para toda* $t > 0$*, se llama semigrupo de concentraciones fuertemente continuo en* B *si*

(i) $\lim_{t\downarrow 0} T_t u = u$, *para toda* $u \in B$*. (Continuidad fuerte)*

(ii) $||T_t u|| \leq ||u||$, *para cualesquiera* $u \in B$ *y* $t > 0$*. (Propiedad de contracción)*

(iii) $T_t T_s = T_{t+s}$, *para cualesquiera* $t, s > 0$*. (Propiedad de semigrupo)*

Definicin 1.6 *Sea* $(T_t)_{t>0}$ *un semigrupo de contracciones fuertemente continuo en* B*. El generador (infinitesimal) de* $(T_t)_{t>0}$ *es el operador lineal* $(L, D(L))$ *en* B *definido por*

$$\begin{aligned} D(L) &= \left\{ u \in B : \lim_{t\downarrow 0} \frac{1}{t}(T_t u - u) \ \textit{existe} \right\} \ \textit{y} \\ Lu &= \lim_{t\downarrow 0} \frac{1}{t}(T_t u - u), \ u \in D(L). \end{aligned}$$

El Diagrama 1 (ver la página 14) resume las relaciones que existen entre los conceptos que hemos definido en esta sección. Para una demostración de las correspondencias que aparecen en el diagrama puede consultarse el libro [MR 92].

1.2 Formas bilineales coercivas

En esta sección se introducirá el concepto de forma bilineal coerciva y se verá la relación que existe de este nuevo concepto con los de la sección anterior. En este caso es más conveniente trabajar en un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ sobre $\mathbb{R}$ con producto interno $(\cdot,\cdot)$ y norma $||\cdot|| := (\cdot,\cdot)^{1/2}$.

Denotaremos por $(\mathcal{E}, D)$ a una forma bilineal en $\mathcal{H}$, donde D es un subespacio lineal de $\mathcal{H}$ y $\mathcal{E} : D \times D \to \mathbb{R}$ es un mapeo bilineal. La *parte simétrica* $(\widetilde{\mathcal{E}}, D)$ y la *parte antisimétrica* $(\widehat{\mathcal{E}}, D)$ de $(\mathcal{E}, D)$ se definen, respectivamente, como

$$\widetilde{\mathcal{E}}(u,v) := \frac{1}{2}\left\{\mathcal{E}(u,v) + \mathcal{E}(v,u)\right\} \quad \text{y} \quad \widehat{\mathcal{E}}(u,v) := \frac{1}{2}\left\{\mathcal{E}(u,v) - \mathcal{E}(v,u)\right\},$$

donde $u, v \in D$. Si $\alpha \geq 0$, se define

$$\mathcal{E}_\alpha(u,v) := \mathcal{E}(u,v) + \alpha(u,v) \quad u, v \in D.$$

Una forma $(\mathcal{E}, D)$ se dice *positivamente definida* si $\mathcal{E}(u,u) \geq 0$, para toda $u \in D$. Sea $(\mathcal{E}, D)$ una forma positivamente definida. Diremos que $(\mathcal{E}, D)$ satisface la *condición sector de débil* si

$$\begin{gathered}\text{existe una constante } K > 0 \text{ tal que} \\ |\mathcal{E}_1(u,v)| \leq K\mathcal{E}_1(u,u)^{1/2}\mathcal{E}_1(v,v)^{1/2} \ \text{ para cualesquiera } u, v \in D.\end{gathered} \tag{1.2}$$

La forma $(\mathcal{E}, D)$ se llama *simétrica* si $\widehat{\mathcal{E}} \equiv 0$, en cuyo caso $\mathcal{E}_\alpha$ es un producto interno y (1.2) es la desigualdad de Cauchy-Schwarz.

Un operador positivo $(L, D(L))$ en $\mathcal{H}$ satisface la *condición de sector (fuerte)* si

$$\begin{gathered}\text{existe una constante } K > 0 \text{ tal que} \\ |(Lu,v)| \leq K(Lu,u)^{1/2}(Lv,v)^{1/2} \ \text{ para cualesquiera } u, v \in D(L).\end{gathered} \tag{1.3}$$

El dominio $D(\mathcal{E})$ de la forma $\mathcal{E}$ se considerará como un espacio lineal normado, con la norma $\widetilde{\mathcal{E}}_1^{1/2}$. Diremos que la *forma $\mathcal{E}$ es cerrada* si $D(\mathcal{E})$ es completo respecto a $\widetilde{\mathcal{E}}_1^{1/2}$.

Definicin 1.7 *La forma $(\mathcal{E}, D(\mathcal{E}))$ se llama forma simétrica cerrada en $\mathcal{H}$ si es positivamente definida, simétrica, $D(\mathcal{E})$ es denso en $\mathcal{H}$ y cerrada en $\mathcal{H}$.*

Definicin 1.8 *La forma $(\mathcal{E}, D(\mathcal{E}))$ se llama forma coerciva cerrada en $\mathcal{H}$ si*

(i) $(\widetilde{\mathcal{E}}, D(\mathcal{E}))$ *es una forma simétrica cerrada en $\mathcal{H}$ y*
(ii) $(\mathcal{E}, D(\mathcal{E}))$ *satisface la condición de sector débil* (1.2).

Teorema 1.9 *Sea $(\mathcal{E}, D(\mathcal{E}))$ una forma coerciva cerrada en $\mathcal{H}$ y C un subespacio lineal de $D(\mathcal{E})$ cerrado. Sea J un funcional lineal continuo en $D(\mathcal{E})$ y $\alpha > 0$. Entonces existe una única $v \in C$ tal que $\mathcal{E}_\alpha(v,\omega) = J(\omega)$, para toda $\omega \in C$.*

Demostracin. Por el teorema de Stampacchia (cf. [MR 92]) existe una única $v \in C$ tal que $\mathcal{E}_\alpha(v, \omega - v) \geq J(\omega - v)$ para toda $\omega \in C$. Luego si $\omega \in C$, entonces

$$\mathcal{E}_\alpha(v,\omega) = \mathcal{E}_\alpha(v, (\omega + v) - v) \geq J((\omega + v) - v) = J(\omega).$$

Debido a que $\mathcal{E}_\alpha(v, v-\omega) \leq J(v-\omega)$, se sigue que

$$\mathcal{E}_\alpha(v,\omega) = \mathcal{E}_\alpha(v, v-(v-\omega)) \leq J(v-(v-\omega)) = J(\omega),$$

y por lo tanto $\mathcal{E}_\alpha(v,\omega) = J(\omega)$. ■

Como consecuencia de este resultado obtenemos el

Teorema 1.10 *Sea $(\mathcal{E}, D(\mathcal{E}))$ una forma coerciva cerrada en $\mathcal{H}$. Entonces existen únicas resolventes de contracciones fuertemente continuas $(G_\alpha)_{\alpha>0}$ y $(\widehat{G_\alpha})_{\alpha>0}$ en $\mathcal{H}$ tales que*

$$G_\alpha(\mathcal{H}) \subset D(E),\ \widehat{G_\alpha}(\mathcal{H}) \subset D(E) \ \ y \ \ \mathcal{E}_\alpha(G_\alpha f, u) = (f,u) = \mathcal{E}_\alpha(u, \widehat{G_\alpha} f), \tag{1.4}$$

para cualesquiera $f \in \mathcal{H}$, $u \in D(\mathcal{E})$ y $\alpha > 0$. En particular

$$(G_\alpha f, g) = (f, \widehat{G_\alpha} g) \text{ para cualesquiera } f, g \in \mathcal{H} \text{ y } \alpha > 0. \tag{1.5}$$

Si denotamos por $(T_t)_{t>0}$ y $(\widehat{T_t})_{t>0}$ a los semigrupos de contracciones fuertemente continuos correspondientes a $(G_\alpha)_{\alpha>0}$ y $(\widehat{G_\alpha})_{\alpha>0}$, respectivamente, entonces

$$(T_t f, g) = (f, \widehat{T_t} g) \ \ \text{para cualesquiera } f, g \in \mathcal{H} \text{ y } t > 0.$$

Demostracin. Para $f \in \mathcal{H}$ fijo definamos el funcional lineal continuo $J(u) := (f,u)$, $u \in D(\mathcal{E})$. Aplicando el Teorema 1.9 a J y $C := D(\mathcal{E})$ obtenemos que para cada $\alpha > 0$ existe una única $G_\alpha f \in D(\mathcal{E})$ tal que $\mathcal{E}_\alpha(G_\alpha f, u) = (f,u)$ para toda $u \in D(\mathcal{E})$. De la unicidad de G_α se sigue que el mapeo $f \mapsto G_\alpha f$ es lineal en $\mathcal{H}$. Si $f \in \mathcal{H}$ es tal que $G_\alpha f = 0$, entonces la bilinealidad de $\mathcal{E}_\alpha$ implica que $(f,u) = \mathcal{E}_\alpha(G_\alpha f, u) = \mathcal{E}_\alpha(0,u) = 0$ para toda $u \in D(\mathcal{E})$. Así, por ser $D(\mathcal{E})$ denso en $\mathcal{H}$ tenemos que $f = 0$. Por lo tanto la aplicación lineal G_α es uno a uno, más aún $(G_\alpha)_{\alpha>0}$ es una resolvente de contracciones fuertemente continua. De igual forma se demuestra que los operadores $\widehat{G_\alpha}$, $\alpha > 0$, son uno a uno, $\mathcal{E}_\alpha(u, \widehat{G_\alpha} f) = (f,u)$, $\widehat{G_\alpha} f \in D(\mathcal{E})$ para toda $u \in D(\mathcal{E})$ y que $(\widehat{G_\alpha})_{\alpha>0}$ es una resolvente de contracciones fuertemente continua. Puesto que $G_\alpha(\mathcal{H}) \subset D(\mathcal{E})$ y $\widehat{G_\alpha}(\mathcal{H}) \subset D(\mathcal{E})$, se tiene

$$(G_\alpha f, g) = \mathcal{E}_\alpha(G_\alpha f, \widehat{G_\alpha} g) = (f, \widehat{G_\alpha} g) \ \ \text{para cualesquiera } f, g \in \mathcal{H},$$

que es (1.5). La existencia de $(T_t)_{t>0}$ y $(\widehat{T_t})_{t>0}$ se sigue del Teorema de Hille-Yosida. Ya que la resolvente de un semigrupo es la transformada de Laplace de éste (ver el Diagrama 1 o la Proposición 1.10 en [MR 92]), obtenemos de (1.5) que

$$\begin{aligned} \int_0^\infty e^{-\alpha s}(T_s f, g)ds &= \left(\int_0^\infty e^{-\alpha s} T_s f ds, g\right) \\ &= (G_\alpha f, g) = (f, \widehat{G_\alpha} g) \\ &= \left(f, \int_0^\infty e^{-\alpha s} \widehat{T_s} g ds\right) = \int_0^\infty e^{-\alpha s}(f, \widehat{T_s} g)ds. \end{aligned}$$

Puesto que la transformada de Laplace es uno a uno en las funciones continuas obtenemos

$$(T_s f, g) = (f, \widehat{T}_s g) \ \text{ para cualesquiera } s > 0 \text{ y } f, g \in \mathcal{H},$$

como se quería demostrar. ∎

Observacin 1.11 *Se hubiese podido definir* $\widehat{G_\alpha}$ *como el adjunto de* G_α, $\alpha > 0$, *y verificar que tiene las propiedades deseadas. La familia de operadores* $(G_\alpha)_{\alpha>0}$ *(resp.* $(T_t)_{t>0}$*) se llama resolvente (resp. semigrupo) asociado a* $(\mathcal{E}, D(\mathcal{E}))$, *y* $(\widehat{G_\alpha})_{\alpha>0}$ *(resp.* $(\widehat{T_t})_{t>0}$*) se llama co-resolvente (resp. co-semigrupo) asociado a* $(\mathcal{E}, D(\mathcal{E}))$. *Al generador* L *(resp.* $\widehat{L}$*) de* $(G_\alpha)_{\alpha>0}$ *(resp. de* $(\widehat{G_\alpha})_{\alpha>0}$*)(ver la Proposición 1.3) se le llama generador (resp. co-genera-dor) de* $(\mathcal{E}, D(\mathcal{E}))$.

El Diagrama 2 (ver la página 15) resume todas las equivalencias entre estos conceptos.

Sea $(\mathcal{E}, D(\mathcal{E}))$ una forma coerciva cerrada y $(u_n) \subset D(\mathcal{E})$ tal que $u_n \to u$, cuando $n \to \infty$, en $\mathcal{H}$, donde $u \in \mathcal{H}$. En general no se cumple que $u \in D(\mathcal{E})$. Una condición suficiente para ello es que $(\widetilde{\mathcal{E}}_1(u_n, u_n))$ sea acotada, como lo muestra el siguiente resultado, del cual haremos uso frecuentemente.

Lema 1.12 *Sea* $(\mathcal{E}, D(\mathcal{E}))$ *una forma coerciva cerrada y sea* $(u_n) \subset D(\mathcal{E})$ *tal que*

$$\sup \{\mathcal{E}(u_n, u_n) : n \in \mathbb{N}\} < \infty.$$

Si $u \in \mathcal{H}$ *y* $u_n \to u$, *cuando* $n \to \infty$, *en* $\mathcal{H}$, *entonces* $u \in D(\mathcal{E})$, $u_n \to u$ *débilmente, cuando* $n \to \infty$, *en el espacio de Hilbert* $(D(\mathcal{E}), \widetilde{\mathcal{E}}_1)$ *y existe una subsucesión* $(u_{n_k})_k$ *de* (u_n) *tal que su medida de Cesaro* $\omega_n := \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_{n_k} \to u$, *cuando* $n \to \infty$, *en* $D(\mathcal{E})$. *Más aún*

$$\mathcal{E}(u, u) \le \liminf_{n\to\infty} \mathcal{E}(u_n, u_n). \tag{1.6}$$

Demostracin. Ya que $u_n \to u$, cuando $n \to \infty$, en $\mathcal{H}$, entonces $\{(u_n, u_n) : n \in \mathbb{N}\}$ es acotado y por lo tanto

$$\sup \{\mathcal{E}_1(u_n, u_n) : n \in \mathbb{N}\} < \infty.$$

Ahora bien, tomando $l_n(u) := \widetilde{\mathcal{E}}_1(u_n, u)$, $u \in D(\mathcal{E})$, y usando la desigualdad de Cauchy-Schwarz, obtenemos que (l_n) está contenida en una bola $B \subset (D(\mathcal{E}), \widetilde{\mathcal{E}}_1)'$ (dual de $(D(\mathcal{E}), \widetilde{\mathcal{E}}_1)$). Por el Teorema de Banach-Alaoglu ésta bola es débilmente compacta y por lo tanto según el Teorema de Bolzano-Wierstras, existe $l \in B$ tal que $l_{n_k} \xrightarrow{w} l$, cuando $k \to \infty$, (convergencia débil $\xrightarrow{w}$) para alguna subsucesión $(n_k)_k$. Por el Teorema de representación de Riesz, aplicado a l, existe $v \in D(\mathcal{E})$ tal que $(u_{n_k}, u) \to (v, u)$, cuando $k \to \infty$, para toda $u \in D(\mathcal{E})$, es decir, $u_{n_k} \xrightarrow{w} v$, cuando $k \to \infty$, en $(D(\mathcal{E}), \widetilde{\mathcal{E}}_1)$. El Teorema de Banach-Saks implica que la medida de Cesaro (ω_n) de la subsucesión $(u_{n_k})_k$ converge a v en $D(\mathcal{E})$ y por lo tanto, en $\mathcal{H}$. Ya que $\omega_n \to u$, cuando $n \to \infty$, en $\mathcal{H}$, se concluye que $u = v$. Empleando el mismo razonamiento para cada subsucesión de (u_n), se sigue que $u_n \xrightarrow{w} u$, cuando $n \to \infty$, en $(D(\mathcal{E}), \widetilde{\mathcal{E}}_1)$; más aún

$$\mathcal{E}(u,u) = \lim_{n\to\infty} \widetilde{\mathcal{E}}(u,u_n) \leq \liminf_{n\to\infty} \, (\widetilde{\mathcal{E}}(u,u)^{1/2}\widetilde{\mathcal{E}}(u_n,u_n)^{1/2}),$$

y así llegamos a la desigualdad $\mathcal{E}(u,u)^{1/2} \leq \liminf_{n\to\infty} \widetilde{\mathcal{E}}(u_n,u_n)^{1/2}$ de la cual sigue la desigualdad (1.6). ■

1.3 Definición de forma de Dirichlet

En esta sección supondremos que $\mathcal{H} = L^2(E;m) := L^2(E,\mathcal{B},m)$, donde $(E,\mathcal{B},m)$ es un espacio de medida arbitrario. Es bien sabido que $L^2(E;m)$ es un espacio de Hilbert con el producto interno

$$(u,v) = \int_E u(x)v(x)m(dx) \ \text{ para cualesquiera } u,v \in L^2(E;m).$$

Es precisamente en este espacio donde definiremos el concepto de forma de Dirichlet. Para $u,v : E \to \mathbb{R}$, denotamos por

$$u \vee v := \max\{u,v\},\ u \wedge v := \min\{u,v\},\ u^+ := u \vee 0 \text{ y } u^- := -(u \wedge 0).$$

Si $u,v \in L^2(E;m)$, entonces una desigualdad del tipo $u < v$, la interpretamos como valida m-c.d. para sendos representantes de las respectivas m-clases de equivalencia.

Definicin 1.13 *Una forma coerciva cerrada $(\mathcal{E}, D(\mathcal{E}))$ en $L^2(E;m)$ se llama forma de Dirichlet si para toda $u \in D(\mathcal{E})$, se cumple que*

$$\begin{gathered} u^+ \wedge 1 \in D(\mathcal{E}),\ \mathcal{E}(u + u^+ \wedge 1, u - u^+ \wedge 1) \geq 0 \\ y\ \mathcal{E}(u - u^+ \wedge 1, u + u^+ \wedge 1) \geq 0. \end{gathered} \tag{1.7}$$

Se llama forma de Dirichlet simétrica si $(\mathcal{E}, D(\mathcal{E}))$ es además simétrica, en cuyo caso (1.7) es equivalente con

$$\mathcal{E}(u^+ \wedge 1, u^+ \wedge 1) \leq \mathcal{E}(u,u).$$

Observacin 1.14 *Si una forma coerciva cerrada satisface alguna de las desigualdades en (1.7), ésta se llama $\frac{1}{2}$-forma de Dirichlet. A la función $u^+ \wedge 1$ se llama contracción unidad de u.*

A fin de relacionar los conceptos de secciones anteriores, con la noción de forma de Dirichlet, necesitamos introducir otros nuevos.

Definicin 1.15 *Un operador lineal acotado G en $L^2(E;m)$, con $D(G) = L^2(E;m)$, se llama sub-Markoviano si para toda $f \in L^2(E;m)$, $0 \leq f \leq 1$ implica $0 \leq Gf \leq 1$. Una resolvente (resp. semigrupo) de contracciones fuertemente continua $(G_\alpha)_{\alpha>0}$ (resp. $(T_t)_{t>0}$) se llama sub-Markoviana si los operadores αG_α, $\alpha > 0$ (resp. T_t, $t > 0$) son sub-Markovianos.*

Definicin 1.16 *Un operador lineal cerrado L densamente definido en $L^2(E;m)$ se llama operador de Dirichlet si $(Lu,(u-1)^+) \leq 0$, para toda $u \in D(L)$.*

Teorema 1.17 *Sea $(\mathcal{E}, D(\mathcal{E}))$ una forma coerciva cerrada en $L^2(E;m)$ y sean L, $(T_t)_{t>0}$ y $(G_\alpha)_{\alpha>0}$ su generador, semigrupo y resolvete correspondientes. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(i) Para toda $u \in D(\mathcal{E})$, $u^+ \wedge 1 \in D(\mathcal{E})$ y $\mathcal{E}(u+u^+\wedge 1, u-u^+\wedge 1) \geq 0$.

(ii) $(G_\alpha)_{\alpha>0}$ es sub-Markoviana.

(iii) $(T_t)_{t>0}$ es sub-Markoviano.

(iv) L es un operador de Dirichlet.

Si consideramos $\widehat{L}$, $(\widehat{T_t})_{t>0}$ y $(\widehat{G_\alpha})_{\alpha>0}$ en lugar de L, $(T_t)_{t>0}$ y $(G_\alpha)_{\alpha>0}$, entonces las equivalencias se cumplen con las entradas de $\mathcal{E}$ en (i) intercambiadas.

Demostracin. $(i) \Longrightarrow (ii)$: Sea $f \in L^2(E;m)$ con $0 \leq f \leq 1$ y $u := \alpha G_\alpha f$. El hecho de que $\mathcal{E}$ es positivamente definida y la propiedad (1.4) implican

$$
\begin{aligned}
0 &\geq -\frac{1}{2}[\mathcal{E}(u+u^+\wedge 1, u-u^+\wedge 1) + \mathcal{E}(u-u^+\wedge 1, u-u^+\wedge 1)] \\
&= -\mathcal{E}(u, u-u^+\wedge 1) = -\alpha\mathcal{E}(G_\alpha f, u-u^+\wedge 1) \\
&= -\alpha(\mathcal{E}_\alpha(G_\alpha f, u-u^+\wedge 1) - \alpha(G_\alpha f, u-u^+\wedge 1)) \\
&= \alpha(u-f, u-u^+\wedge 1) \\
&= \alpha\,||u-u^+\wedge 1||^2 + \alpha(u^+\wedge 1 - f, u-u^+\wedge 1). \qquad (1.8)
\end{aligned}
$$

Debido a que $u = (u-1)^+ + u\wedge 1$ y $u \wedge 1 = (u\wedge 1)^+ - (u\wedge 1)^- = u^+\wedge 1 + u\wedge 0$, resulta $u - u^+\wedge 1 = (u-1)^+ + u\wedge 0$ y

$$
\begin{aligned}
(u^+\wedge 1 - f, u-u^+\wedge 1) &= \int_{[u\geq 1]} (u^+\wedge 1 - f)(u-1)dm \\
&\quad + \int_{[u\leq 0]} (u^+\wedge 1 - f)(u\wedge 0)dm \\
&= \int_{[u\geq 1]} (u-f)(u-1)^+dm \\
&\quad + \int_{[u\leq 0]} (-f)udm \\
&\geq 0.
\end{aligned}
$$

Así, de (1.8) obtenemos que $||u-u^+\wedge 1|| = 0$, es decir, $u = u^+\wedge 1$, en otras palabras $0 \leq u \leq 1$.

$(ii) \Longrightarrow (iii)$: Si $u \in D(L)$ y $t > 0$, entonces (ver el Diagrama 1 o la demostración del Teorema 1.12 en [MR 92])

$$T_t u = \lim_{\alpha\to\infty} \exp(t\alpha(\alpha G_\alpha - 1))u. \qquad (1.9)$$

Si $u \in D(L)$ y $0 \leq u \leq 1$, entonces $0 \leq \beta G_\beta u \leq 1$, para toda $\beta > 0$. Así, $0 \leq \alpha G_\alpha(\beta G_\beta u) \leq 1$ para toda $\alpha > 0$ y $0 \leq T_t(\beta G_\beta u) \leq 1$ por (1.9). Debido a que T_t es continuo y $(G_\alpha)_{\alpha>0}$ es fuertemente continuo, se obtiene $0 \leq T_t u \leq 1$, para toda $t > 0$.

(iii) $\Longrightarrow$ *(iv)*: Sea $t > 0$ y $f \in L^2(E; m)$. Debido a que $0 \leq |f| \wedge 1 - f \wedge 1 \leq 1$, entonces $0 \leq T_t(|f| \wedge 1 - f \wedge 1) = T_t(|f| \wedge 1) - T_t(f \wedge 1) \leq 1$ y como $0 \leq |f| \wedge 1 \leq 1$, se sigue también que $0 \leq T_t(|f| \wedge 1) \leq 1$, es decir, $T_t(f \wedge 1) \leq T_t(|f| \wedge 1) \leq 1$, usando esta desigualdad y que $f = (f-1)^+ + f \wedge 1$, obtenemos

$$\begin{aligned}
(T_t f, (f-1)^+) &= (T_t(f-1)^+, (f-1)^+) + (T_t(f \wedge 1), (f-1)^+) \\
&\leq (T_t(f-1)^+, T_t(f-1)^+)^{1/2}((f-1)^+, (f-1)^+)^{1/2} \\
&\quad + \int T_t(f \wedge 1)(f-1)^+ dm \\
&\leq ((f-1)^+, (f-1)^+) + \int (f-1)^+ dm \\
&= \int (f-1)^+(f-1)^+ dm + \int (f-1)^+ dm \\
&= \int (f-1)(f-1)^+ dm + \int (f-1)^+ dm \\
&= \int f(f-1)^+ dm = (f, (f-1)^+).
\end{aligned}$$

Por lo tanto $(T_t f - f, (f-1)^+) \leq 0$. Consecuentemente para toda $u \in D(L)$,

$$(Lu, (u-1)^+) = \lim_{t \downarrow 0} \frac{1}{t}(T_t u - u, (u-1)^+) \leq 0.$$

(iv) $\Longrightarrow$ *(i)*: *Bosquejo.* Para $u \in D(L)$ y $v \in L^2(E; m)$ definamos

$$\mathcal{E}^{(\beta)}(u, v) := \beta(1 - \beta^2)(u, v) + \beta^2(Lu, v).$$

Para cada $u \in D(L)$ fijo tenemos

$$\mathcal{E}^{(\beta)}(u \wedge 1, (u-1)^+) = \beta((1 - \beta(\beta - L)^{-1}(u \wedge 1), (u-1)^+) \geq 0, \tag{1.10}$$

lo que implica que $\sup_{\beta>0} \mathcal{E}^{(\beta)}((u-1)^+, (u-1)^+) < \infty$, y de esto, a su vez, se sigue que

$$\begin{aligned}
\sup_{\beta>0} \mathcal{E}_1(\beta G_\beta(u-1)^+, \beta G_\beta(u-1)^+) &\leq \sup_{\beta>0} \mathcal{E}^{(\beta)}((u-1)^+, (u-1)^+) \\
&\quad + \sup_{\beta>0} (\beta G_\beta(u-1)^+, \beta G_\beta(u-1)^+) \\
&< \infty,
\end{aligned}$$

donde $(G_\beta)_{\beta>0}$ es la resolvente asociada al generador L, ver el Diagrama 2. Debido a la continuidad fuerte de $(G_\beta)_{\beta>0}$, $\beta G_\beta(u-1)^+ \longrightarrow (u-1)^+$, cuando $\beta \longrightarrow \infty$, en $L^2(E; m)$, entonces $(u-1)^+ \in D(\mathcal{E})$, esto por el Lema 1.12. De igual forma se verifica que $u^+ \in D(\mathcal{E})$. Así, $u^+ \wedge 1 = u^+ - (u-1)^+ \in D(\mathcal{E})$, y por ser $D(L) \subset D(\mathcal{E})$

denso el resultado es cierto para toda $u \in D(\mathcal{E})$. De la igualdad $u = (u-1)^+ + u \wedge 1$ y (1.10) se concluye que

$$\begin{aligned}\mathcal{E}(u \wedge 1, u - u \wedge 1) &= \lim_{\beta\to\infty} \mathcal{E}^{(\beta)}(u \wedge 1, u - u \wedge 1) \\ &= \lim_{\beta\to\infty} \mathcal{E}^{(\beta)}(u \wedge 1, (u-1)^+) \geq 0,\end{aligned}$$

y de esto se sigue la desigualdad deseada. ■

El Diagrama 3 (ver la página 16) resume todas las equivalencias entre los conceptos definidos hasta ahora.

A menudo, en lugar de verificar la condición (1.7) es preferible usar el siguiente resultado.

Proposicin 1.18 *Sea $(\mathcal{E}, D(\mathcal{E}))$ una forma coerciva cerrada en $L^2(E;m)$.*

(i) Sea $u \in D(\mathcal{E})$ y supóngase que

$$\left.\begin{array}{l}\textit{para toda } \varepsilon > 0 \textit{ existe } \varphi_\varepsilon : \mathbb{R} \to [-\varepsilon, 1+\varepsilon] \textit{ tal que } \varphi_\varepsilon(t) = t, \\ \textit{para toda } t \in [0,1],\ 0 \leq \varphi_\varepsilon(t_2) - \varphi_\varepsilon(t_1) \leq t_2 - t_1, \textit{ si } t_1 \leq t_2, \\ \varphi_\varepsilon \circ u \in D(\mathcal{E}) \textit{ y } \liminf_{\varepsilon\to 0} \mathcal{E}(u \pm \varphi_\varepsilon \circ u, u \mp \varphi_\varepsilon \circ u) \geq 0.\end{array}\right\} \qquad (1.11)$$

Entonces (1.7) se cumple.

(ii) $(\mathcal{E}, D(\mathcal{E}))$ es una forma de Dirichlet si y sólo si (1.11) se verifica para toda $u \in D(\mathcal{E})$.

Demostracin. (i). Sumando las desigualdades $+,-$ y $-,+$ en (1.11) resulta que

$$\begin{aligned}0 &\leq \liminf_{\varepsilon\to 0} \mathcal{E}(u + \varphi_\varepsilon \circ u, u - \varphi_\varepsilon \circ u) + \liminf_{\varepsilon\to 0} \mathcal{E}(u - \varphi_\varepsilon \circ u, u + \varphi_\varepsilon \circ u) \\ &\leq \liminf_{\varepsilon\to 0} \left(\mathcal{E}(u + \varphi_\varepsilon \circ u, u - \varphi_\varepsilon \circ u) + \mathcal{E}(u - \varphi_\varepsilon \circ u, u + \varphi_\varepsilon \circ u)\right) \\ &= \liminf_{\varepsilon\to 0} 2(\mathcal{E}(u,u) - \mathcal{E}(\varphi_\varepsilon \circ u, \varphi_\varepsilon \circ u)) \\ &= 2(\mathcal{E}(u,u) - \limsup_{\varepsilon\to 0} \mathcal{E}(\varphi_\varepsilon \circ u, \varphi_\varepsilon \circ u)).\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\limsup_{\varepsilon\to 0} \mathcal{E}(\varphi_\varepsilon \circ u, \varphi_\varepsilon \circ u) \leq \mathcal{E}(u,u)$. Como $|\varphi_\varepsilon \circ u| \leq |u|$, entonces $\varphi_\varepsilon \circ u \to u^+ \wedge 1$, cuando $\varepsilon \to 0$, en $L^2(E;m)$. Por otra parte si (ε_n) es tal que $\varepsilon_n \downarrow 0$, cuando $n \to \infty$, entonces existe una subsucesión (denotada también por (ε_n)) tal que $\lim_{n\to\infty} \mathcal{E}(\varphi_{\varepsilon_n} \circ u, \varphi_{\varepsilon_n} \circ u) < \infty$ y $\varphi_{\varepsilon_n} \circ u \to u^+ \wedge 1$, cuando $n \to \infty$, en $L^2(E;m)$. Así, $u^+ \wedge 1 \in D(\mathcal{E})$, debido al Lema 1.12, y $(\varphi_{\varepsilon_n} \circ u)$ converge débilmente a $u^+ \wedge 1$ en $(D(\mathcal{E}), \widetilde{\mathcal{E}}_1)$, otra vez, existe una subsucesión (nuevamente denotada por (ε_n)) tal que $\mathcal{E}(u^+ \wedge 1, u^+ \wedge 1) \leq \liminf_{n\to\infty} \mathcal{E}(\varphi_{\varepsilon_n} \circ u, \varphi_{\varepsilon_n} \circ u)$. Entonces por (1.11)

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}(u \pm u^+ \wedge 1, u \mp u^+ \wedge 1) &= \mathcal{E}(u,u) \pm \lim_{n\to\infty} \mathcal{E}(u, \varphi_{\varepsilon_n} \circ u) \pm \lim_{n\to\infty} \mathcal{E}(\varphi_{\varepsilon_n} \circ u, u) \\
&\quad -\mathcal{E}(u^+ \wedge 1, u^+ \wedge 1) \\
&\geq \mathcal{E}(u,u) \pm \lim_{n\to\infty} \mathcal{E}(u, \varphi_{\varepsilon_n} \circ u) \pm \lim_{n\to\infty} \mathcal{E}(\varphi_{\varepsilon_n} \circ u, u) \\
&\quad -\liminf_{n\to\infty} \mathcal{E}(\varphi_{\varepsilon_n} \circ u, \varphi_{\varepsilon_n} \circ u) \\
&= \limsup_{n\to\infty} \mathcal{E}(u \pm \varphi_{\varepsilon_n} \circ u, u \mp \varphi_{\varepsilon_n} \circ u) \\
&\geq \liminf_{n\to\infty} \mathcal{E}(u \pm \varphi_{\varepsilon_n} \circ u, u \mp \varphi_{\varepsilon_n} \circ u) \geq 0.
\end{aligned}$$

(ii). Basta mostrar que si $(\mathcal{E}, D(\mathcal{E}))$ es una forma de Dirichlet, entonces se cumple (1.11). Pero esto es evidente si tomamos, por ejemplo, las funciones $\varphi_\varepsilon(t) = (t \vee 0) \wedge 1$ para toda $\varepsilon > 0$. ■

Observacin 1.19 *La tercera condición en (1.11) puede sustituirse por*

$$\begin{gathered}
\varphi_\varepsilon \circ u \in D(\mathcal{E}),\ \liminf_{\varepsilon\to 0} \mathcal{E}(\varphi_\varepsilon \circ u, u - \varphi_\varepsilon \circ u) \geq 0 \\
y\ \liminf_{\varepsilon\to 0} \mathcal{E}(u - \varphi_\varepsilon \circ u, \varphi_\varepsilon \circ u) \geq 0.
\end{gathered} \tag{1.12}$$

En efecto, basta notar que

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}(u + \varphi_\varepsilon(u), u - \varphi_\varepsilon(u)) &= \mathcal{E}(u - \varphi_\varepsilon(u), u - \varphi_\varepsilon(u)) + 2\mathcal{E}(\varphi_\varepsilon(u), u - \varphi_\varepsilon(u)), \\
\mathcal{E}(u - \varphi_\varepsilon(u), u + \varphi_\varepsilon(u)) &= \mathcal{E}(u - \varphi_\varepsilon(u), u - \varphi_\varepsilon(u)) + 2\mathcal{E}(u - \varphi_\varepsilon(u), \varphi_\varepsilon(u)).
\end{aligned}$$

Proposicin 1.20 *Una forma coerciva cerrada $(\mathcal{E}, D(\mathcal{E}))$ en $L^2(E; m)$ es una forma de Dirichlet si y sólo si (1.7), (1.11) o (1.12) se cumplen en un subconjunto denso de $D(\mathcal{E})$.*

Demostracin. El resultado es consecuencia de la Proposición 1.18, la Observación 1.19 y del Lema 1.12 (ver la página 35 en [MR 92]). ■

Diagrama 1

B es un espacio de Banach sobre $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$

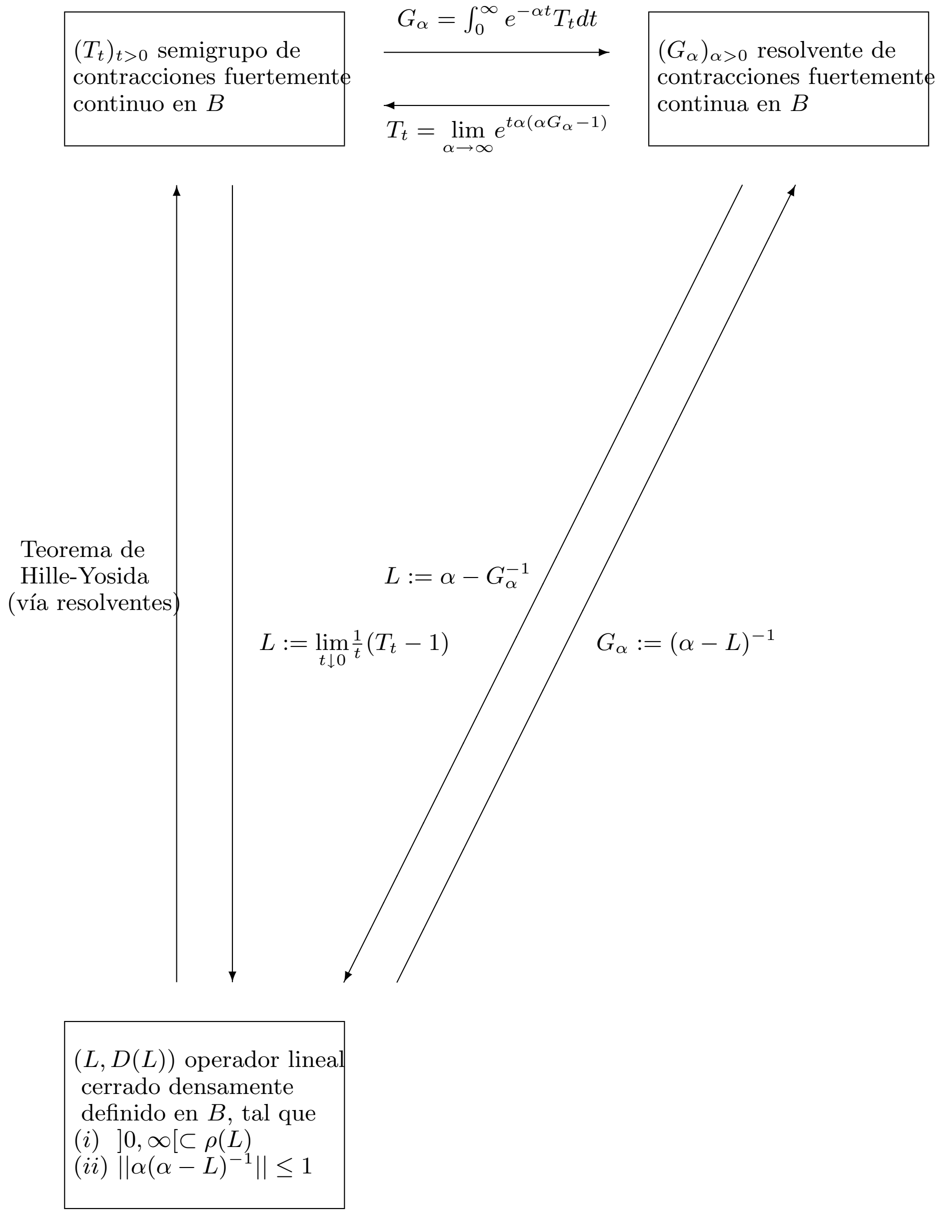


Diagrama 2

$\mathcal{H}$ es un espacio de Hilbert sobre $\mathbb{R}$

$(T_t)_{t>0}$ semigrupo de contracciones fuertemente continuo en $\mathcal{H}$

$(e^{-t}T_t^{\mathbb{C}})_{t>0}$ es la restricción† de un semigrupo holomorfo de contracciones en $\mathcal{H}_{\mathbb{C}}$

$G_\alpha = \int_0^\infty e^{-\alpha t} T_t dt$

$T_t = \lim\limits_{\alpha\to\infty} e^{t\alpha(\alpha G_\alpha - 1)}$

$(G_\alpha)_{\alpha>0}$ resolvente de contracciones fuertemente continua en $\mathcal{H}$

$|(G_1 u, v)| \leq$ cte$\cdot$ $(G_1 u, u)^{1/2}\cdot$ $(G_1 v, v)^{1/2}$

Teorema de Hille-Yosida (vía resolventes)

$L := \lim\limits_{t\downarrow 0} \frac{1}{t}(T_t - 1)$

$L := \alpha - G_\alpha^{-1}$

$G_\alpha := (\alpha - L)^{-1}$

$\mathcal{E}(u, v) = \lim\limits_{\beta\to\infty} \beta(u - \beta G_\beta u, v)$

$\mathcal{E}_\alpha(G_\alpha u, v) = (u, v)$, $u \in \mathcal{H}$, $v \in D(\mathcal{E})$

$(L, D(L))$ operador lineal cerrado densamente definido en $\mathcal{H}$, tal que
(i) $]0, \infty[\subset \rho(L)$
(ii) $||\alpha(\alpha - L)^{-1}|| \leq 1$

(iii) $|((1 - L)u, v)| \leq$ cte. $((1 - L)u, u)^{1/2}\cdot$ $((1 - L)v, v)^{1/2}$

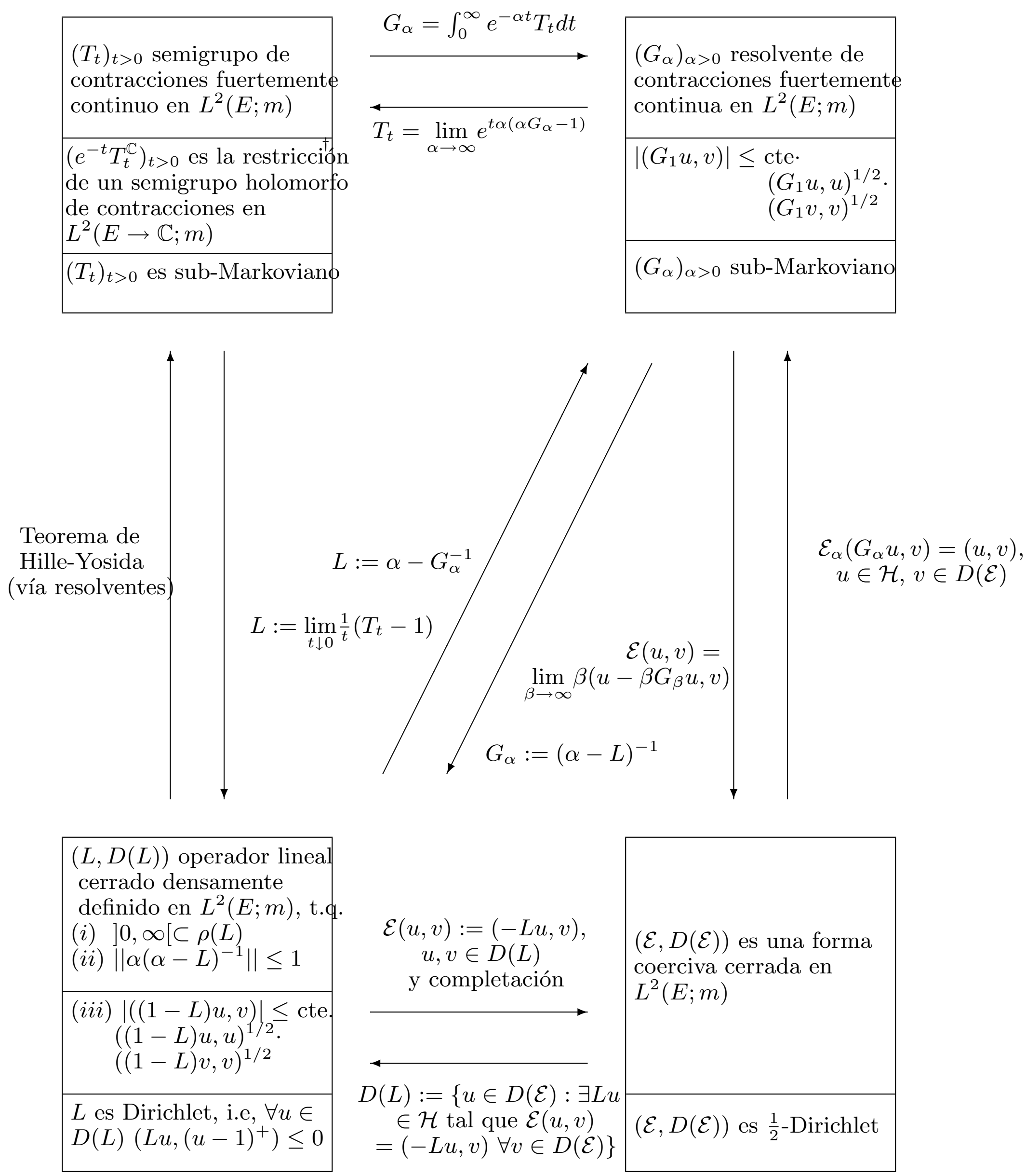
$\mathcal{E}(u, v) := (-Lu, v)$, $u, v \in D(L)$ y completación

$D(L) := \{u \in D(\mathcal{E}) : \exists Lu \in \mathcal{H}$ tal que $\mathcal{E}(u, v) = (-Lu, v)\ \forall v \in D(\mathcal{E})\}$

$(\mathcal{E}, D(\mathcal{E}))$ es una forma coerciva cerrada en $\mathcal{H}$

†: Para la definición de estos conceptos ver [MR 92]. † es equivalente a pedir que $1 - L$ satisfaga (1.2), donde L es generador del semigrupo $(T_t)_{t>0}$.

Diagrama 3



†: Para la definición de estos conceptos ver [MR 92]. † es equivalente a pedir que $1-L$ satisfaga (1.2), donde L es generador del semigrupo $(T_t)_{t>0}$.

Captulo 2

Ejemplos

En este capítulo daremos dos ejemplos fundamentales de formas de Dirichlet, mismos que trataremos más delante o sea en el Capítulo 5.

2.1 Cerrabilidad

El concepto de cerrabilidad es muy importante debido a que las formas bilineales que aparecen en los ejemplos y en las aplicaciones por lo general no son cerradas (ver la página 6). Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert real con producto interno $(\cdot,\cdot)$ y norma $(\cdot,\cdot)^{1/2}$.

Definicin 2.1 *Sea $\mathcal{E}$ una forma bilineal positivamente definida con dominio $D \subset \mathcal{H}$. Una sucesión $(u_n) \subset D$ se llama $\mathcal{E}$-Cauchy si $\mathcal{E}(u_n - u_m, u_n - u_m) \to 0$, cuando $m, n \to \infty$.*

Definicin 2.2 *Sea $\mathcal{E}$ una forma bilineal positivamente definida con dominio $D \subset \mathcal{H}$. $(\mathcal{E}, D)$ es cerrable en $\mathcal{H}$ si $(u_n) \subset D$ es $\mathcal{E}$-Cauchy y $u_n \to 0$, cuando $n \to \infty$, en $\mathcal{H}$, entonces $\mathcal{E}(u_n, u_n) \to 0$, cuando $n \to \infty$.*

Nótese que $(\mathcal{E}, D(\mathcal{E}))$, en la Definición 2.2 es cerrable si y sólo si su parte simétrica $(\widetilde{\mathcal{E}}, D(\mathcal{E}))$ lo es.

Dadas dos formas bilineales $\mathcal{E}^{(1)}$ y $\mathcal{E}^{(2)}$, $\mathcal{E}^{(2)}$ se dice *extensión* de $\mathcal{E}^{(1)}$ si $D(\mathcal{E}^{(1)}) \subset D(\mathcal{E}^{(2)})$ y $\mathcal{E}^{(2)} = \mathcal{E}^{(1)}$ en $D(\mathcal{E}^{(1)}) \times D(\mathcal{E}^{(1)})$. Una condición necesaria y suficiente para que una forma simétrica tenga una extensión es que sea cerrable (ver [F 80]).

Sea $\breve{D}$ la completación abstracta (es decir, a través de equivalencias de sucesiones de Cauchy) del espacio prehilbertiano D con producto interno $\widetilde{\mathcal{E}}_1$.

Observacin 2.3 *Si $(\mathcal{E}, D)$ es cerrable, entonces $\widetilde{\mathcal{E}}$ tiene una única extensión a $\breve{D}$. Si además $(\mathcal{E}, D)$ satisface la condición de sector débil (1.2), entonces $\mathcal{E}$ también se extiende, de manera única, a $\breve{D}$. La extensión se denotará de nuevo por $\mathcal{E}$. Más aún, si D es denso en $\mathcal{H}$, entonces $(\mathcal{E}, \breve{D})$ es la forma coerciva cerrada más pequeña que extiende a $(\mathcal{E}, D)$ (es decir, si $(\mathcal{E}^{(1)}, D(\mathcal{E}^{(1)}))$ es una forma cerrada coerciva que es una extensión de $(\mathcal{E}, D)$, entonces también es una extensión de $(\mathcal{E}, \breve{D})$). La forma $(\mathcal{E}, \breve{D})$ se llama cerradura de $(\mathcal{E}, D)$.*

Proposicin 2.4 *Sea S un operador lineal en $\mathcal{H}$, negativamente definido, tal que $1-S$ satisface la condición de sector (1.3). Defínase*

$$\mathcal{E}(u,v) := (-Su,v), \quad u,v \in D(S).$$

Entonces $(\mathcal{E}, D(\mathcal{E}))$ es cerrable en $\mathcal{H}$.

Demostracin. Si $u,v \in D(S)$, entonces $\mathcal{E}_1(u,v) = ((1-S)u,v)$, y ya que $1-S$ cumple (1.3), entonces $\mathcal{E}$ satisface la condición de sector débil (1.2). Sea $(u_n) \subset D(S)$ tal que (u_n) es $\mathcal{E}$-Cauchy y $u_n \to 0$, cuando $n \to \infty$, en $\mathcal{H}$. De lo anterior es inmediato que (u_n) es $\mathcal{E}_1$-Cauchy y por tanto $\{\mathcal{E}_1(u_n,u_n) : n \in \mathbb{N}\}$ es acotado, digamos por M. Ahora bien, para $\varepsilon > 0$ existe n_1 tal que si $n,m \geq n_{1,}$ entonces $\mathcal{E}_1(u_n - u_m, u_n - u_m) < \varepsilon$. Y como $\mathcal{E}(u_{n_1}, u_n) = (-Su_{n_1}, u_n) \leq (Su_{n_1}, Su_{n_1})(u_n,, u_n) \to 0$, cuando $n \to \infty$, existe n_2 tal que si $n \geq n_2$, entonces $\mathcal{E}(u_{n_1}, u_n) < \varepsilon$. Por lo tanto para $n \geq n_1 \vee n_2$,

$$\begin{aligned}
0 \ &\leq \ \mathcal{E}_1(u_n,u_n) = \mathcal{E}_1(u_n - u_{n_1}, u_n - u_{n_1}) + \mathcal{E}_1(u_{n_1}, u_n) \\
&\quad\ +\mathcal{E}_1(u_n - u_{n_1}, u_{n_1}) \\
&\leq \ \mathcal{E}_1(u_n - u_{n_1}, u_n - u_{n_1}) + \mathcal{E}_1(u_{n_1}, u_n) \\
&\quad\ +K\mathcal{E}_1(u_n - u_{n_1}, u_n - u_{n_1})^{1/2}\mathcal{E}_1(u_{n_1}, u_{n_1})^{1/2} \\
&< \ \varepsilon + \varepsilon + K\varepsilon^{1/2}M^{1/2}.
\end{aligned}$$

Así $\mathcal{E}(u_n,u_n) \to 0$, cuando $n \to \infty$. ∎

Otra condición suficiente para la cerrabilidad, de una forma, la da el siguiente resultado.

Proposicin 2.5 *Sean* $(\mathcal{E}^{(k)}, D^{(k)})$, $k \in \mathbb{N}$, *formas bilineales simétricas cerrables en $\mathcal{H}$. Definamos*

$$D := \left\{ u \in \bigcap_{k\in\mathbb{N}} D^{(k)} : \sum_{k=1}^{\infty} \mathcal{E}^{(k)}(u,u) < \infty \right\} \ y$$

$$\mathcal{E}(u,v) := \sum_{k=1}^{\infty} \mathcal{E}^{(k)}(u,v) \quad u,v \in D.$$

Entonces $(\mathcal{E}, D)$ es cerrable en $\mathcal{H}$.

Demostracin. Sea $(u_n) \subset D$ tal que (u_n) es $\mathcal{E}$-Cauchy y $u_n \to 0$, cuando $n \to \infty$, en $\mathcal{H}$. Entonces por hipótesis tenemos que $\lim_{m\to\infty} \mathcal{E}^{(k)}(u_m,u_m) = 0$ para cada $k \in \mathbb{N}$. Por otra parte, la desigualdad de Cauchy-Schwarz implica que

$$\mathcal{E}^{(k)}(u_n,u_n) = \lim_{m\to\infty} \mathcal{E}^{(k)}(u_n - u_m, u_n - u_m),$$

de esto y del Lema de Fatou se sigue que

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}(u_n, u_n) &= \sum_{k=1}^{\infty} \mathcal{E}^{(k)}(u_n, u_n) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \lim_{m\to\infty} \mathcal{E}^{(k)}(u_n - u_m, u_n - u_m) \\
&\leq \liminf_{m\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \mathcal{E}^{(k)}(u_n - u_m, u_n - u_m) \\
&= \liminf_{m\to\infty} \mathcal{E}(u_n - u_m, u_n - u_m),
\end{aligned}$$

y este último $\liminf$ se puede hacer arbitrariamente pequeño para toda n suficientemente grande. ■

2.2 Formas de Dirichlet finito dimensionales

Sea $E := U$, un abierto en $\mathbb{R}^d$ y $m := \sigma\ dx$, donde dx es la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^d$ y $\sigma \in L^1_{loc}(U; dx)$ (por $L^1_{loc}(U; dx)$ denotamos al conjunto de todas la funciones reales f definidas en U tal que para todo $K \subset U$ compacto $f 1_K \in L^1(U; dx)$), $\sigma \geq 0$, dx-c.d. tal que supp $m = E$ (es decir, $m(V) > 0$ para todo $\emptyset \neq V \subset E$, V abierto). Sean, además, $a_{ij} \in L^1_{loc}(U; dx)$, $a_{ij} = a_{ji}$, $1 \leq i, j \leq d$, tal que,

$$\left.\begin{array}{c}
\text{para } dx\text{-c.t } x \in \mathbb{R}^d \text{ y cualesquiera } \xi_1, \ldots, \xi_d \in \mathbb{R}, \\
\sum\limits_{i,j=1}^{d} a_{ji}(x)\xi_i\xi_j \geq c \sum\limits_{i=1}^{d} \xi_i^2,
\end{array}\right\} \tag{2.1}$$

donde c es una constante positiva. Para $u, v \in C_0^\infty(U)$ definimos

$$\mathcal{E}(u, v) := \sum_{i,j=1}^{d} \int \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} a_{ji}\sigma\ dx, \tag{2.2}$$

donde $C_0^\infty(U)$ es el conjunto de todas las funciones infinitamente diferenciables en U con soporte compacto. Entonces $(\mathcal{E}, C_0^\infty(U))$ es una forma bilineal simétrica positivamente definida (debido a (2.1)) y densamente definida en $L^2(U; \sigma\ dx)$.

Sea $\rho \in B^+(U)$, donde $B(U)$ denota al espacio de las funciones reales, medibles, definidas en U y $B^+(U)$ al subconjunto de elementos de $B(U)$ no negativos. Definamos

$$R(\rho) := \left\{ x \in U : \int\limits_{\{y \in U : ||x-y|| \leq \varepsilon\}} \rho^{-1}(y) dy \ < \infty \ \text{ para algún } \varepsilon > 0 \right\},$$

donde usamos la convención de que $a/0 :=$ (signo a) $\cdot\, \infty$. Es fácil ver que $R(\rho)$ es abierto y que $\rho > 0$ dx-c.d en $R(\rho)$. Más aún $R(\rho)$ es el conjunto abierto más grande $V \subset U$ tal que $\rho^{-1} \in L^1_{loc}(V; dx)$.

Supongamos que

$$\sigma = 0 \ dx\text{-c.d en } U \backslash R(\sigma). \tag{2.3}$$

Antes de continuar necesitamos el siguiente resultado.

Lema 2.6 *Sea $\rho \in B^{+}(U)$ tal que (2.3) se cumple, para ρ. Entonces*

$$L^2(U; \rho \ dx) \subset L^1_{loc}(R(\rho); dx)$$

y la inclusión es continua.

Demostracin. Sea $u \in L^2(U; \rho \ dx)$ y $K \subset R(\rho)$ compacto. Entonces por la desigualdad de Cauchy-Schwarz y (2.3)

$$\begin{aligned} \int\limits_K |u| \, dx &= \int\limits_K |u| \, \rho^{-1} \rho dx \\ &\leq \left(\int\limits_{R(\rho)} u^2 \rho dx \right)^{1/2} \left(\int\limits_K \rho^{-1} dx \right)^{1/2} \\ &= \left(\int\limits_K \rho^{-1} dx \right)^{1/2} \left(\int\limits_U u^2 \rho dx \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Pero $\int_K \rho^{-1} dx < \infty$ pues $\rho^{-1} \in L^1_{loc}(R(\rho); dx)$. ■

Proposicin 2.7 *Bajo la condición (2.3), la forma $(\mathcal{E}, C_0^\infty(U))$ definida por (2.2) es cerrable en $L^2(U; \sigma \ dx)$.*

Demostracin. Fijemos $i \in \{1, ..., d\}$ y sea $(u_n) \subset C_0^\infty(U)$ tal que (u_n) es $\mathcal{E}$-Cauchy y $u_n \to 0$, cuando $n \to \infty$, en $L^2(U; \sigma \ dx)$. Por el Lema 2.6 tenemos que $u_n \to 0$, cuando $n \to \infty$, en $L^1_{loc}(R(\rho); dx)$. Y de la condición (2.1) se sigue que

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(u_n - u_m, u_n - u_m) &= \int \sum_{i,j=1}^{d} \frac{\partial(u_n - u_m)}{\partial x_i} \frac{\partial(u_n - u_m)}{\partial x_j} a_{ij} \sigma \ dx \\ &\geq c \sum_{i=1}^{d} \int \left(\frac{\partial(u_n - u_m)}{\partial x_i} \right)^2 \sigma \ dx. \end{aligned}$$

De esta forma, (u_n) $\mathcal{E}$-Cauchy implica que $\left(\frac{\partial u_n}{\partial x_i}\right)_n$ es Cauchy en $L^2(U; \sigma \ dx)$, y por lo tanto, existe $f_i \in L^2(U; \sigma \ dx)$ tal que $\frac{\partial u_n}{\partial x_i} \to f_i$, cuando $n \to \infty$, en $L^2(U; \sigma \ dx)$ y por el Lema 2.6 resulta que $\frac{\partial u_n}{\partial x_i} \to f_i$, cuando $n \to \infty$, en $L^1_{loc}(R(\sigma); dx)$. Sea $v \in C_0^\infty(R(\rho))$. Entonces

$$\int\limits_{R(\rho)} f_i v dx = \lim_{n \to \infty} \int\limits_{R(\rho)} \frac{\partial u_n}{\partial x_i} v dx = -\lim_{n \to \infty} \int\limits_{R(\rho)} u_n \frac{\partial v}{\partial x_i} dx = 0.$$

Así, $f_i = 0$ dx-c.d. en $R(\sigma)$ y por (2.3) tenemos que $f_i = 0$ σ dx-c.d. Ahora bien, podemos tomar una subsucesión $(u_{n_k})_k$ tal que $\frac{\partial u_{n_k}}{\partial x_i} \to 0$, cuando $k \to \infty$, dx-c.d. para toda $1 \leq i \leq d$. Entonces del Lema de Fatou y de (2.1) obtenemos que

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}(u_n, u_n) &= \int \lim_{k\to\infty} \sum_{i,j=1}^{d} \left(\frac{\partial(u_n - u_{n_k})}{\partial x_i} \frac{\partial(u_n - u_{n_k})}{\partial x_j} a_{ij} \right) \sigma\ dx \\
&\leq \liminf_{k\to\infty} \int \sum_{i,j=1}^{d} \left(\frac{\partial(u_n - u_{n_k})}{\partial x_i} \frac{\partial(u_n - u_{n_k})}{\partial x_j} a_{ij} \right) \sigma\ dx \\
&= \liminf_{k\to\infty} \mathcal{E}(u_n - u_{n_k}, u_n - u_{n_k}),
\end{aligned}$$

que es arbitrariamente pequeño para toda n suficientemente grande, debido a que (u_n) es $\mathcal{E}$-Cauchy. ■

La forma $(\mathcal{E}, C_0^\infty(U))$ satisface trivialmente la condición de sector débil (1.2) pues es simétrica (ver la página 6). Así su cerradura $(\mathcal{E}, D(\mathcal{E}))$ es una forma coerciva cerrada en $L^2(U; \sigma\ dx)$. Ahora veamos que $(\mathcal{E}, D(\mathcal{E}))$ es una forma de Dirichlet. Debido a la Proposición 1.20 es suficiente mostrar que para toda $\varepsilon > 0$

$$\left.\begin{array}{l}
\phi_\varepsilon \circ u \in D(\mathcal{E}),\ \liminf_{\varepsilon\to 0} \mathcal{E}(\phi_\varepsilon \circ u, u - \phi_\varepsilon \circ u) \geq 0 \text{ y} \\
\liminf_{\varepsilon\to 0} \mathcal{E}(u - \phi_\varepsilon \circ u, \phi_\varepsilon \circ u) \geq 0 \ \text{ para toda } u \in C_0^\infty(U),
\end{array}\right\} \tag{2.4}$$

donde $\phi_\varepsilon : \mathbb{R} \to [-\varepsilon, 1+\varepsilon]$ es una función infinitamente diferenciable tal que $\phi_\varepsilon(t) = t$, $t \in [0,1]$, $0 \leq \phi_\varepsilon(t) - \phi_\varepsilon(s) \leq t - s$, $t, s \in \mathbb{R}$, $t \geq s$, $\phi_\varepsilon(t) = 1 + \varepsilon$, $t \in [1 + 2\varepsilon, +\infty[$ y $\phi_\varepsilon(t) = -\varepsilon$, $t \in]-\infty, -2\varepsilon[$.

Observacin 2.8 *Las funciones del párrafo anterior existen. Consideremos, por ejemplo, $x \in \mathbb{R}$,*

$$j(x) := \begin{cases} \gamma \exp(-(1 - |x|^2)^{-1}), & |x| < 1, \\ 0, & |x| \geq 1, \end{cases} \tag{2.5}$$

donde γ es una constante tal que $\int_{\mathbb{R}} j(x)dx = 1$. Sea $j_\delta(x) := \delta^{-d} j(\delta^{-1}x)$, $\delta > 0$. Para $\varepsilon > 0$ sea la función $\psi_\varepsilon(t) := ((-\varepsilon) \vee t) \wedge (1 + \varepsilon)$, $t \in \mathbb{R}$ y definamos $\varphi_\varepsilon(t) := (j_\delta * \psi_\varepsilon)(t) = \int_{\mathbb{R}} j_\delta(t-s)\psi_\varepsilon(s)ds$, $0 < \delta < \varepsilon$. Debido al hecho $(j_\delta * \psi_\varepsilon)' = j_\delta' * \psi_\varepsilon$, resulta claro que φ_ε es infinitamente diferenciable.

Si $u \in C_0^\infty(U)$, entonces claramente $\phi_\varepsilon \circ u \in C_0^\infty(U)$. Probaremos solamente la primera desigualdad en (2.4). Por (2.1) tenemos

$$\begin{aligned}
\liminf_{\varepsilon\to 0} \mathcal{E}(\phi_\varepsilon \circ u, u - \phi_\varepsilon \circ u) &= \liminf_{\varepsilon\to 0} \sum_{i,j=1}^{d} \int \frac{\partial(\phi_\varepsilon \circ u)}{\partial x_i} \frac{\partial(u - \phi_\varepsilon \circ u)}{\partial x_j} a_{ij} \sigma\ dx \\
&= \liminf_{\varepsilon\to 0} \int \phi_\varepsilon'(u)(1 - \phi_\varepsilon'(u)) \sum_{i,j=1}^{d} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_j} a_{ij} \sigma\ dx \\
&\geq c \liminf_{\varepsilon\to 0} \sum_{i=1}^{d} \int \phi_\varepsilon'(u)(1 - \phi_\varepsilon'(u)) \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right)^2 \sigma\ dx \\
&\geq 0,
\end{aligned}$$

pues $0 \leq \phi'_\varepsilon \leq 1$. De esta forma hemos demostrado que $(\mathcal{E}, D(\mathcal{E}))$ es una forma de Dirichlet en $L^2(U; \sigma\ dx)$.

2.3 Formas de Dirichlet infinito dimensionales

En esta sección vamos a estudiar *formas de Dirichlet tipo gradiente*. Sea E un espacio de Banach real separable, E' su dual y ${}_{E'}\langle \cdot, \cdot \rangle_E : E' \times E \to \mathbb{R}$ la dualización correspondiente. Sea $m := \mu$ una medida finita en $\mathcal{B}(E)$, la σ-álgebra de Borel de E (la cual es igual a $\sigma(E')$), tal que supp $\mu = E$.

Definamos el espacio lineal de funciones en E

$$\mathcal{F}C_b^\infty := \{f(l_1, ..., l_m) : m \in \mathbb{N},\ f \in C_b^\infty(\mathbb{R}^m),\ l_1, ..., l_m \in E'\},$$

donde $C_b^\infty(\mathbb{R}^m)$ denota el conjunto de todas las funciones real-valuadas que son infinitamente diferenciables con todas sus derivadas parciales acotadas. El subespacio lineal $\mathcal{F}C_b^\infty$ es denso en $L^2(E; \mu)$. Para $u \in \mathcal{F}C_b^\infty$ y $k \in E$ se define

$$\frac{\partial u}{\partial k}(z) := \frac{d}{ds} u(z + sk)\bigg|_{s=0}, \quad z \in E.$$

Si $u = f(l_1, ..., l_m)$, entonces

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial k}(z) &= \frac{d}{ds} f(l_1(z + sk), ..., l_m(z + sk))\bigg|_{s=0} \\ &= \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial x_i}(l_1(z + sk), ..., l_m(z + sk)) \frac{dl_i}{ds}(z + sk)\bigg|_{s=0} \\ &= \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial x_i}(l_1, ..., l_m)(z)\ {}_{E'}\langle l_i, k \rangle_E. \end{aligned} \tag{2.6}$$

Así $\frac{\partial u}{\partial k} \in \mathcal{F}C_b^\infty$. Para $k \in E$ definimos

$$\mathcal{E}^{(k)}(u, v) := \int \frac{\partial u}{\partial k} \frac{\partial v}{\partial k} d\mu, \quad u, v \in \mathcal{F}C_b^\infty,$$

entonces $(\mathcal{E}^{(k)}, \mathcal{F}C_b^\infty)$ es una forma bilineal simétrica positivamente definida y densamente definida en $L^2(E; \mu)$.

Definicin 2.9 *$k \in E$ se llama μ-admisible si $(\mathcal{E}^{(k)}, \mathcal{F}C_b^\infty)$ es cerrable en $L^2(E; \mu)$.*

Definicin 2.10 *$k \in E$ se llama bien-μ-admisible si existe $\beta_k \in L^2(E; \mu)$ tal que para cualesquiera $u, v \in \mathcal{F}C_b^\infty$*

$$\int \frac{\partial u}{\partial k} v d\mu = -\int u \frac{\partial v}{\partial k} d\mu - \int u v \beta_k d\mu. \tag{2.7}$$

Proposicin 2.11 *El conjunto, W, de los elementos bien-μ-admisibles es un subespacio lineal de E y la aplicación $k \mapsto \beta_k$ es lineal de W a $L^2(E; \mu)$.*

Demostracin. Sean $a, b \in \mathbb{R}$ y $k, h \in E$. Si $u \in \mathcal{F}C_b^\infty$ es fácil ver que (2.6) implica la siguiente igualdad

$$\frac{\partial u}{\partial(ak+bh)} = a\frac{\partial u}{\partial k} + b\frac{\partial u}{\partial h}.$$

Así si $k, h \in W$, entonces las afirmaciones son consecuencia inmediata de la observación anterior y de (2.7). ∎

Proposicin 2.12 *Si k es bien-μ-admisible, entonces es μ-admisible.*

Demostracin. Definamos el operador lineal

$$S_k u := \frac{\partial}{\partial k}\left(\frac{\partial u}{\partial k}\right) + \beta_k \frac{\partial u}{\partial k}, \quad u \in \mathcal{F}C_b^\infty,$$

entonces de (2.7) tenemos que

$$(-S_k u, v) = \int \frac{\partial u}{\partial k}\frac{\partial v}{\partial k} d\mu \ \text{ para cualesquiera } u, v \in \mathcal{F}C_b^\infty.$$

Así S_k es un operador negativamente definido y simétrico, por lo cual, $1-S_k$ satisface la condición de sector (1.3). Y debido a la igualdad anterior resulta que $(\mathcal{E}^{(k)}, \mathcal{F}C_b^\infty)$ es cerrable en $L^2(E;\mu)$, esto por la Proposición 2.4. ∎

Supongamos que existe un espacio de Hilbert real separable $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle_H)$ densa y continuamente contenido en E, identificando H con su dual H' obtenemos

$$E' \subset H' \equiv H \subset E \text{ densa y continuamente,}$$

y ${}_{E'}\langle \cdot, \cdot \rangle_E$ restringida a $E' \times H$ coincide con $\langle \cdot, \cdot \rangle_H$. La topología en E' es la dada por su norma $|| \cdot ||_{E'}$.

De la Proposición 2.11 se ve que si $u \in \mathcal{F}C_b^\infty$ y $z \in E$, son fijos, entonces el mapeo $h \longmapsto \frac{\partial u}{\partial h}(z)$ es un funcional lineal continuo en H, de esta forma el Teorema de representación de Riesz implica que existe $\nabla u(z) \in H$ tal que

$$\langle \nabla u(z), h \rangle_H = \frac{\partial u}{\partial h}(z) \ \text{ para toda } h \in H. \tag{2.8}$$

Definamos

$$\mathcal{E}(u, v) := \int \langle \nabla u, \nabla v \rangle_H d\mu, \quad u, v \in \mathcal{F}C_b^\infty, \tag{2.9}$$

entonces $(\mathcal{E}, \mathcal{F}C_b^\infty)$ es una forma bilineal simétrica positivamente definida y densamente definida en $L^2(E;\mu)$. Veamos que (2.9) está bien definida. H separable implica que existe una base ortonormal numerable K (ver Teorema II.7 en [RS 80]).

Si $u = f(l_1, ..., l_m) \in \mathcal{F}C_b^\infty$, entonces de (2.8) y (2.6) tenemos

$$\begin{aligned}
\int \langle \nabla u, \nabla u \rangle_H d\mu &= \sum_{h \in K} \int \langle \nabla u, h \rangle_H^2 d\mu \\
&= \sum_{h \in K} \int \left(\frac{\partial u}{\partial h} \right)^2 d\mu \\
&= \sum_{h \in K} \int \left(\sum_{i=1}^m \frac{\partial f}{\partial x_i}(l_1, ..., l_m) \ {}_{E'}\langle l_i, h \rangle_E \right)^2 d\mu \\
&\leq \int \sum_{i=1}^m \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}(l_1, ..., l_m) \right)^2 d\mu \sum_{i=1}^m \sum_{h \in K} \ {}_{E'}\langle l_i, h \rangle_E^2 \\
&= \sum_{i=1}^m \int \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}(l_1, ..., l_m) \right)^2 d\mu \sum_{i=1}^m \ {}_{E'}\langle l_i, l_i \rangle_E^2 < \infty.
\end{aligned}$$

Así, la existencia de la integral en (2.9) se sigue de lo anterior y de la desigualdad de Cauchy-Schwarz. Haciendo un cálculo parecido al que acabamos de realizar vemos que

$$\mathcal{E}(u, v) = \sum_{k \in K} \mathcal{E}^{(k)}(u, v). \tag{2.10}$$

Proposicin 2.13 *Sea K una base ortonormal de H que consiste de elementos μ-admisible en E, entonces $(\mathcal{E}, \mathcal{F}C_b^\infty)$ dada por (2.9) es cerrable en $L^2(E; \mu)$ y su cerradura es una forma de Dirichlet simétrica.*

Demostracin. La cerrabilidad se sigue de (2.10) y la Proposición 2.5. Sean φ_ε, $\varepsilon > 0$, como en la Observación 2.8, entonces $\varphi_\varepsilon(u) \in \mathcal{F}C_b^\infty$ para toda $u \in \mathcal{F}C_b^\infty$ y para cada $k \in K$

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}^{(k)}(\varphi_\varepsilon(u), u - \varphi_\varepsilon(u)) &= \int \varphi_\varepsilon'(u) \left(\frac{\partial u}{\partial h} \right)^2 d\mu - \int \varphi_\varepsilon'(u)^2 \left(\frac{\partial u}{\partial h} \right)^2 d\mu \\
&= \int \varphi_\varepsilon'(u)(1 - \varphi_\varepsilon'(u)) \left(\frac{\partial u}{\partial h} \right)^2 d\mu \geq 0.
\end{aligned}$$

Entonces el resultado es consecuencia de la Proposición 1.20 (parte 1.19). ■

Captulo 3

Teoría del potencial de formas de Dirichlet

En este capítulo E es un espacio de Hausdorff, $\mathcal{B}(E)$ es su σ-álgebra de Borel y m es una medida positiva σ-finita en $(E, \mathcal{B}(E))$. Sea $(\mathcal{E}, D(\mathcal{E}))$ una forma de Dirichlet en $L^2(E; m)$, fija.

3.1 Conjuntos excepcionales y capacidades

Para $F \subset E$ cerrado se define

$$D(\mathcal{E})_F := \{u \in D(\mathcal{E}) : u = 0 \ m\text{-c.d en } F^c := E \backslash F\}.$$

$D(\mathcal{E})_F$ es un subespacio cerrado de $D(\mathcal{E})$.

Definicin 3.1 *Una sucesión creciente (F_k) de conjuntos cerrados en E se llama un $\mathcal{E}$-nido si $\cup_{k=1}^{\infty} D(\mathcal{E})_{F_k}$ es denso en $D(\mathcal{E})$ (con respecto a $\widetilde{\mathcal{E}}_1^{1/2}$ ver la página 6).*

Definicin 3.2 *Un subconjunto $N \subset E$ se llama $\mathcal{E}$-excepcional si $N \subset \cap_{k=1}^{\infty} F_k^c$ para algún $\mathcal{E}$-nido (F_k). Una propiedad de puntos en E se cumple $\mathcal{E}$-quasi donde sea (abreviada $\mathcal{E}$-q.d.) si dicha propiedad se cumple para todos los puntos fuera de un conjunto $\mathcal{E}$-excepcional.*

Observacin 3.3 *Nótese que las definiciones anteriores sólo dependen de la parte simétrica de $(\mathcal{E}, D(\mathcal{E}))$. Por otra parte, se puede mostrar que todo conjunto Boreliano $\mathcal{E}$-excepcional tiene m-medida cero.*

Con el propósito de caracterizar conjunto excepcionales vamos a introducir el concepto de capacidad asociado a la parte simétrica $(\widetilde{\mathcal{E}}, D(\mathcal{E}))$ de $(\mathcal{E}, D(\mathcal{E}))$; una extensión del concepto de capacidad para formas no simétricas se da en [MR 92].

Sea $(\widetilde{G_\alpha})_{\alpha>0}$ la resolvente correspondiente a $(\widetilde{\mathcal{E}}, D(\mathcal{E}))$ en $L^2(E; m)$.

Definicin 3.4 *Sea $\varphi \in L^2(E;m)$ con $0 < \varphi \leq 1$ y sea $h := \widetilde{G_1}\varphi$. Para $U \subset E$ abierto se define*

$$\widetilde{Cap}_h(U) := \inf\{\mathcal{E}_1(u,u) : u \in D(\mathcal{E}),\, u \geq h \text{ } m\text{-c.d. en } U\}.$$

Para cualquier $A \subset E$ sea

$$\widetilde{Cap}_h(A) := \inf\{\widetilde{Cap}_h(U) : A \subset U \subset E,\, U \text{ abierto}\}.$$

$\widetilde{Cap}_h(U)$ se llama capacidad h-escalada asociada a $(\widetilde{\mathcal{E}}, D(\mathcal{E}))$.

Observacin 3.5 *Si (A_n) es una sucesión de subconjuntos de E (arbitrarios), entonces $\widetilde{Cap}_h(\cup_{n\geq 1}A_n) \leq \sum_{n\geq 1}\widetilde{Cap}_h(A_n)$.*

La relación entre capacidad y $\mathcal{E}$-nido se da en el siguiente teorema, el cual solamente enunciamos; su demostración se da en [F 80].

Teorema 3.6 *Sea h como en la Definición 3.4.*

- (i) *Una sucesión creciente (F_k) de conjuntos cerrados en E es un $\mathcal{E}$-nido si y sólo si $\lim_{k\to\infty}\widetilde{Cap}_h(F_k^c) = 0$.*
- (ii) *Un subconjunto $N \subset E$ es $\mathcal{E}$-excepcional si y sólo si $\widetilde{Cap}_h(N) = 0$.*

3.2 Quasi-continuidad

En esta sección $\varphi \in L^2(E;m)$ es una función dada tal que $0 < \varphi \leq 1$ m-c.d. Ponemos

$$h := \widetilde{G_1}\varphi. \tag{3.1}$$

Dado un $\mathcal{E}$-nido (F_k) definimos $C(\{F_k\})$ como el conjunto de todas las funciones real-valuadas cuyos dominios, subconjuntos de E, contienen a $\cup_{k\geq 1}F_k$ y son continuas en F_k para cada $k \in \mathbb{N}$, mas precisamente

$$C(\{F_k\}) := \left\{ f : A \to \mathbb{R} : \bigcup_{k\geq 1} F_k \subset A \subset E,\, f|_{F_k} \text{ es continua para toda } k \in \mathbb{N} \right\}.$$

Como antes, nótese que la siguiente definición únicamente depende de la parte simétrica de $(\mathcal{E}, D(\mathcal{E}))$.

Definicin 3.7 *Una función f definida $\mathcal{E}$-q.d. en E se llama $\mathcal{E}$-quasi continua si existe un $\mathcal{E}$-nido (F_k) tal que $f \in C(\{F_k\})$.*

Proposicin 3.8 *Sea (f_m) una sucesión de funciones $\mathcal{E}$-quasi continuas en E. Entonces existe un $\mathcal{E}$-nido (F_k) tal que $(f_m) \subset C(\{F_k\})$.*

Demostracin. Para toda $m \in \mathbb{N}$ existe un $\mathcal{E}$-nido (F_k^m) tal que $f_m \in C(\{F_k^m\})$ y $\widetilde{Cap}_h((F_k^m)^c) \leq 1/(2^m k)$ (esto por el Teorema 3.6 (i)). Sea $F_k := \cap_{m \geq 1} F_k^m$, $k \in \mathbb{N}$. Entonces cada F_k es cerrado y

$$\widetilde{Cap}_h(F_k^c) \leq \sum_{m \geq 1} \widetilde{Cap}_h((F_k^m)^c) \leq \frac{1}{k},$$

debido a la Observación 3.5. Así por el Teorema 3.6 y la Observación 3.5 (F_k) es un $\mathcal{E}$-nido y claramente $(f_m) \subset C(\{F_k\})$. ■

En las aplicaciones haremos uso de la Proposición 3.10 y su demostración depende de una desigualdad tipo Chebyshev que a continuación enunciamos, por completes.

Proposicin 3.9 *Sea $u \in D(\mathcal{E})$ tal que tiene una m-versión $\widetilde{u}$ $\mathcal{E}$-quasi continua. Entonces para toda $\lambda > 0$*

$$\widetilde{Cap}_h\{|\widetilde{u}| > \lambda\} \leq \frac{1}{\lambda^2}\mathcal{E}_1(u, u).$$

Sean f, f_n, $n \in \mathbb{N}$, funciones definidas $\mathcal{E}$-q.d. en E. Decimos que (f_n) converge a f *$\mathcal{E}$-quasi uniformemente* si existe un $\mathcal{E}$-nido (F_k) tal que $f_n \to f$, cuando $n \to \infty$, uniformemente en cada F_k.

Proposicin 3.10 *Sea $(u_n) \subset D(\mathcal{E})$ tal que u_n tiene una m-versión $\mathcal{E}$-quasi continua $\widetilde{u}_n$, $n \in \mathbb{N}$ y tal que $u_n \to u \in D(\mathcal{E})$, cuando $n \to \infty$, respecto a $\widetilde{\mathcal{E}}_1^{1/2}$. Entonces existe una subsucesión $(u_{n_k})_k$ y una m-versión $\mathcal{E}$-quasi continua $\widetilde{u}$ de u tal que $(\widetilde{u}_{n_k})_k$ converge $\mathcal{E}$-quasi uniformemente a $\widetilde{u}$.*

Demostracin. Ya que $u_n \to u$, cuando $n \to \infty$, en $\widetilde{\mathcal{E}}_1^{1/2}$, entonces existe una subsucesión $(u_{n_i})_i$ de (u_n) tal que

$$\mathcal{E}_1(u_{n_{i+1}} - u_{n_i}, u_{n_{i+1}} - u_{n_i})^{1/2} \leq 2^{-3i}.$$

Así, por la Proposición 3.9 resulta que

$$\widetilde{Cap}_h\{|\widetilde{u}_{n_{i+1}} - \widetilde{u}_{n_i}| > 2^{-i}\} \leq \frac{1}{(2^{-i})^2}\mathcal{E}_1(u_{n_{i+1}} - u_{n_i}, u_{n_{i+1}} - u_{n_i}) \leq 2^{-i}$$

para toda $i \in \mathbb{N}$. Sea

$$A_k := \bigcup_{i \geq k}\{|\widetilde{u}_{n_{i+1}} - \widetilde{u}_{n_i}| > 2^{-i}\},\ k \in \mathbb{N}.$$

Por la Proposición 3.8 existe un $\mathcal{E}$-nido (F_k') tal que $\widetilde{u}_n \in C(\{F_k'\})$ para toda $n \in \mathbb{N}$. Definamos

$$F_k := F_k' \cap A_k^c,\ k \in \mathbb{N}.$$

Entonces (F_k) es una $\mathcal{E}$-nido (debido al Teorema 3.6 y a la Observación 3.5) y $(\widetilde{u}_{n_i})$ converge uniformemente en cada F_k (pues converge uniformemente en cada A_k^c). Sea

$$\widetilde{u}(z) := \begin{cases} \lim\limits_{i\to\infty} \widetilde{u}_{n_i}(z), & \text{si } z \in \bigcup\limits_{k\geq 1} F_k, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

El hecho de que $\widetilde{u}$ es una m-versión de u se sigue de que $\widetilde{\mathcal{E}}_1^{1/2}$-convergencia implica la convergencia m-c.d. de una subsucesión y ya que $m(\cap_{k\geq 1} F_k^c) = 0$, según la Observación 3.3, concluimos que $\widetilde{u}$ es una m-versión de u. ■

Captulo 4

Procesos de Markov y formas de Dirichlet

En los capítulos precedentes se describió sucintamente los aspectos analíticos de las formas de Dirichlet. Ahora vamos a considerar la relación que hay entre formas de Dirichlet y los procesos de Markov, a saber que a toda forma de Dirichlet quasi-regular le corresponde , en cierto sentido, un proceso de Markov. La demostración de este hecho es muy larga y debido a esto nos confinaremos en este capítulo a presentar los resultados principales, poniendo énfasis en los ejemplos y en algunas aplicaciones de las formas de Dirichlet. De esta forma comenzamos con las aplicaciones de las formas de Dirichlet.

E será un espacio topológico de Hausdorff tal que su σ-álgebra de Borel, $\mathcal{B}(E)$, coincide con la σ-álgebra generada por la colección, $C(E)$, de todas las funciones continuas en E, es decir, tal que $\mathcal{B}(E) = \sigma(C(E))$.

4.1 Procesos de Markov

Dado un espacio medible $(S, \mathcal{B})$, la *completación* de la σ-álgebra $\mathcal{B}$ respecto a una medida de probabilidad P en $(S, \mathcal{B})$ se denotará por $\mathcal{B}^P$. Un elemento B de $\mathcal{B}^* := \cap_{P \in \mathcal{P}(S)} \mathcal{B}^P$ se llama *conjunto universalmente medible*, donde $\mathcal{P}(S)$ denota a la colección de todas las medidas de probabilidad en $(S, \mathcal{B})$. Dada una sub-σ-álgebra $\mathcal{C}$ de $\mathcal{B}$, denotaremos por $\mathcal{C}^P$ a la *completación de* $\mathcal{C}$ *en* $\mathcal{B}^P$ respecto a $P \in \mathcal{P}(S)$, definida por

$$\mathcal{C}^P = \{A \subset S : A \triangle B \subset N \text{ para algunos } B \in \mathcal{C} \text{ y } N \in \mathcal{B} \text{ con } P(N) = 0\}.$$

Sea dado un espacio medible $(\Omega, \mathcal{M})$. Una familia $(\mathcal{M}_t) = (\mathcal{M}_t)_{t \in [0,\infty]}$ de sub-σ-álgebras de $\mathcal{M}$ se llama filtración (en $(\Omega, \mathcal{M})$) si $\mathcal{M}_s \subset \mathcal{M}_t$, para $s \leq t$ y $\mathcal{M}_\infty = \bigvee_{t \in [0,\infty[} \mathcal{M}_t$, es decir, $\mathcal{M}_\infty$ es la σ-álgebra generada por $\{\mathcal{M}_t : t \in [0, \infty[\}$.

Una filtración $(\mathcal{M}_t)$ se llama continua por la derecha si $\mathcal{M}_t = \cap_{s>t} \mathcal{M}_s := \mathcal{M}_{t+}$ para toda $t \geq 0$. Se dice que la filtración $(\mathcal{M}_t)$ en un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{M}, P)$ satisface las condiciones usuales si $\mathcal{M}_t = \mathcal{M}_{t+}^P$ para toda $t \geq 0$.

Sea Δ un punto que no está en E. Ponemos $E_\Delta := E \cup \{\Delta\}$, el cual es un espacio de Haudorff con σ-álgebra de Borel $\mathcal{B}(E_\Delta) = \mathcal{B}(E) \cup \{B \cup \{\Delta\} : B \in \mathcal{B}(E)\}$. Cuando E es localmente compacto E_Δ es la compactificación de E por un punto.

Definicin 4.1 *Decimos que $(X_t)_{t\geq 0}$ es un proceso estocástico (en $(\Omega, \mathcal{M})$) con espacio de estados E y tiempo de vida ζ si:*

- *(i)* $X_t : \Omega \to E_\Delta$ *es* $\mathcal{M}/\mathcal{B}(E_\Delta)$*-medible para toda* $t \geq 0$.
- *(ii)* $\zeta : \Omega \to [0, \infty]$ *es* $\mathcal{M}$*-medible.*
- *(iii)* *Para toda* $\omega \in \Omega$, $X_t(\omega) \in E$ *si* $t < \zeta(\omega)$, *y* $X_t(\omega) = \Delta$ *si* $t \geq \zeta(\omega)$.

A Δ le llamaremos el cementerio del proceso.

Un proceso estocástico $(X_t)_{t\geq 0}$ se llama medible si el mapeo $(t, \omega) \longmapsto X_t(\omega)$ es $\mathcal{B}([0, \infty[) \otimes \mathcal{M}/\mathcal{B}(E_\Delta)$-medible. $(X_t)_{t\geq 0}$ es $(\mathcal{M}_t)$-adaptado (o adaptado a la filtración $(\mathcal{M}_t)$) si X_t es $\mathcal{M}_t/\mathcal{B}(E_\Delta)$-medible para toda $t \geq 0$.

Definicin 4.2 $\mathbf{M} := (\Omega, \mathcal{F}, (X_t)_{t\geq 0}, (P_z)_{z\in E_\Delta})$ *se llama proceso de Markov (homogéneo en el tiempo con espacio de estados E y tiempo de vida ζ) si:*

- *(i)* *Existe una filtración $(\mathcal{M}_t)$ en $(\Omega, \mathcal{M})$ tal que $(X_t)_{t\geq 0}$ es $(\mathcal{M}_t)$-adaptado, con espacio de estados E y tiempo de vida ζ*
- *(ii)* *Para cada $t \geq 0$ existe un operador de translación $\theta_t : \Omega \to \Omega$ tal que $X_s \circ \theta_t = X_{s+t}$ para cualesquiera $s, t \geq 0$.*
- *(iii)* *Para cada $z \in E_\Delta$, P_z es una medida de probabilidad en $(\Omega, \mathcal{M})$ tal que $z \longmapsto P_z(\Gamma)$ es $\mathcal{B}(E_\Delta)^*$-medible para cada $\Gamma \in \mathcal{M}$, resp. $z \longmapsto P_z(\Gamma)$ es $\mathcal{B}(E_\Delta)$-medible si $\Gamma \in \sigma\{X_s : s \geq 0\}$, y $P_\Delta(X_0 = \Delta) = 1$.*
- *(iv)* *(Propiedad de Markov.) Para todo $A \in \mathcal{B}(E_\Delta)$ y $t, s \geq 0$,*
$$P_z[X_{s+t} \in A | \mathcal{M}_s] = P_{X_s}[X_t \in A],\ P_z\text{-c.s.},\ z \in E_\Delta.$$

Dado un proceso de Markov $\mathbf{M}$ y una medida positiva μ en $(E_\Delta, \mathcal{B}(E_\Delta))$ se define la medida de probabilidad P_μ en $(\Omega, \mathcal{M})$ como

$$P_\mu(\Gamma) := \int_{E_\Delta} P_z(\Gamma)\mu(dz),\ \ \Gamma \in \mathcal{M}.$$

Si $\mu \in \mathcal{P}(E_\Delta)$, la esperanza respecto a μ y la esperanza respecto a μ dada una sub-σ-álgebra $\mathcal{G}$ de $\mathcal{M}$ se denotarán por E_μ y $E_\mu[\cdot|\mathcal{G}]$, respectivamente. Sea $(\mathcal{M}_t)$ una filtración en $(\Omega, \mathcal{M})$. Una función $\tau : \Omega \to [0, \infty]$ se llama $(\mathcal{M}_t)$-tiempo de paro si $\{\tau \leq t\} \in \mathcal{M}_t$, para toda $t \geq 0$. Si τ es un $(\mathcal{M}_t)$-tiempo de paro se define

$$\mathcal{M}_\tau := \{\Gamma \in \mathcal{M} : \Gamma \cap \{\tau \leq t\} \in \mathcal{M}_t \text{ para toda } t \geq 0\}.$$

La colección $\mathcal{M}_\tau$ es una sub-σ-álgebra de $\mathcal{M}$.

Definicin 4.3 *Sea* $\mathbf{M} := (\Omega, \mathcal{F}, (X_t)_{t\geq 0}, (P_z)_{z\in E_\Delta})$ *un proceso de Markov con espacio de estados* E*, tiempo de vida* ζ *adaptado a la filtración* $(\mathcal{M}_t)$*.* $\mathbf{M}$ *se llama proceso de Markov derecho respecto a* $(\mathcal{M}_t)$ *si:*

- (i) $P_z[X_0 = z] = 1$*, para toda* $z \in E_\Delta$*. (Propiedad normal)*
- (ii) *Para cada* $\omega \in \Omega$*,* $t \longmapsto X_t(\omega)$ *es continuo por la derecha en* $[0, \infty[$*. (Continuidad por la derecha)*
- (iii) $(\mathcal{M}_t)$ *es continua por la derecha y para todo* $(\mathcal{M}_t)$*-tiempo de paro* σ *y toda* $\mu \in \mathcal{P}(E_\Delta)$
$$P_\mu[X_{\sigma+t} \in A|\mathcal{M}_\sigma] = P_{X_\sigma}[X_t \in A],\ P_\mu\text{-c.s.},$$
para cualesquiera $A \in \mathcal{B}(E_\Delta)$ *y* $t \geq 0$*. (Propiedad fuerte de Markov)*

Sea $\mathbf{M}$ un proceso de Markov con respecto a la filtración $(\mathcal{M}_t)$ (ver Definición la 4.2(i)). Para $t \in [0, \infty]$ se definen

$$\mathcal{F}_t^0 := \sigma\{X_s : 0 \leq s \leq t\} \ \text{ y } \ \mathcal{F}_t := \bigcap_{\mu\in\mathcal{P}(E_\Delta)} \left(\mathcal{F}_t^0\right)^{P_\mu}.$$

A $(\mathcal{F}_t)$ se le llama filtración natural de $\mathbf{M}$. En adelante supondremos que $(\mathcal{M}_t)$ es la filtración natural $(\mathcal{F}_t)$ y que $\mathcal{F} := \mathcal{F}_\infty$.

Sea M un proceso de Markov derecho con espacio de estados E y tiempo de vida ζ. E_z y $E_z[\cdot|\mathcal{G}]$ denotan la esperanza y a la esperanza condicional dada la sub-σ-álgebra $\mathcal{G}$ de $\mathcal{F}$, respecto a la medida de probabilidad P_z, $z \in E_\Delta$. Ya que $(X_t)_{t\geq 0}$ es medible (debido a 4.3(ii)) se sigue que

$$p_t f(z) := p_t(z, f) := E_z[f(X_t)], \quad z \in E,\ t \geq 0,\ f \in \mathcal{B}(E)^+,$$

es un semigrupo de núcleos en $(E, \mathcal{B})$, al cual se le llama semigrupo de transición del proceso de Markov $\mathbf{M}$.

Definicin 4.4 *Sea* $(\mathcal{E}, D(\mathcal{E}))$ *una forma de Dirichlet en* $L^2(E; m)$ *y* $(T_t)_{t>0}$*,* $(\widehat{T}_t)_{t>0}$ *los semigrupos sub-Markovianos (ver el Teorema 1.17) de contracciones fuertemente continuos asociados a* $(\mathcal{E}, D(\mathcal{E}))$*.*

- *(i)* *Un proceso de Markov derecho* $\mathbf{M}$ *con espacio de estados* E *y semigrupo de transición* $(p_t)_{t>0}$ *se dice asociado (resp. co-asociado) con* $(\mathcal{E}, D(\mathcal{E}))$ *si* $p_t f$ *es una m-versión de* $T_t f$ *(resp. de* $\widehat{T}_t f$*) para toda* $t > 0$ *y* $f \in \mathcal{B}_b(E) \cap L^2(E; m)$*.* $\mathbf{M}$ *se llama asociado propiamente (resp. co-asociado propiamenete) si además* $p_t f$ *es* $\mathcal{E}$*-quasi continua para toda* $t > 0$ *y* $f \in \mathcal{B}_b(E) \cap L^2(E; m)$*.*
- *(ii)* *Una pareja* $(\mathbf{M}, \widehat{\mathbf{M}})$ *de procesos de Markov derechos se llama asociada (propiamente) con* $(\mathcal{E}, D(\mathcal{E}))$ *si* $\mathbf{M}$ *es asociado (propiamente) y* $\widehat{\mathbf{M}}$ *es co-asociado (propiamente) con* $(\mathcal{E}, D(\mathcal{E}))$*.*

4.2 Formas de Dirichlet quasi-regulares

Definicin 4.5 *Una forma de Dirichlet* $(\mathcal{E}, D(\mathcal{E}))$ *en* $L^2(E;m)$ *se llama quasi-regular si:*

- (i) *Existe un subconjunto de* $D(\mathcal{E})$ *que es* $\widetilde{\mathcal{E}}_1^{1/2}$*-denso y cuyos elementos tienen* m*-versiones* $\mathcal{E}$*-quasi continuas.*
- (ii) *Existe* $(u_n) \subset D(\mathcal{E})$ *tal que* u_n *tiene una* m*-versión* $\mathcal{E}$*-quasi continua* $\widetilde{u}_n$*,* $n \in \mathbb{N}$*, y un conjunto* $\mathcal{E}$*-excepcional* $N \subset E$ *para el que* $\{\widetilde{u}_n : n \in \mathbb{N}\}$ *separa puntos de* $E \backslash N$*.*
- (iii) *Existe un* $\mathcal{E}$*-nido* (E_k) *constituido por conjuntos compactos.*

Como antes, nótese que la noción de quasi-regularidad solamente depende de la parte simétrica de la forma $(\mathcal{E}, D(\mathcal{E}))$.

Observacin 4.6 *Por el Teorema 3.6 la propiedad (iii) en la Definición 4.5 es equivalente a la tensión de* $\widetilde{Cap}_h$ *(donde* h *es como en (3.1)).* $\widetilde{Cap}_h$ *es tensa si existen compactos* $K_n \subset E$*,* $n \in \mathbb{N}$*, tales que* $\lim_{n\to\infty} \widetilde{Cap}_h(K_n^c) = 0$*.*

La caracterización fundamental de formas de Dirichlet quasi-regulares es la siguiente.

Teorema 4.7 *Una forma de Dirichlet* $(\mathcal{E}, D(\mathcal{E}))$ *en* $L^2(E;m)$ *es quasi-regular si y sólo si existe una pareja* $(\mathbf{M}, \widehat{\mathbf{M}})$ *de procesos de Markov derechos asociados con* $(\mathcal{E}, D(\mathcal{E}))$*. En este caso* $(\mathbf{M}, \widehat{\mathbf{M}})$ *siempre es propiamente asociados con* $(\mathcal{E}, D(\mathcal{E}))$*.*

Y de no menos importancia es el teorema que se enuncia a continuación, el cual relaciona la teoría del potencial analítica de la forma de Dirichlet con la teoría del potencial probabilistica del proceso de Markov. Sea $\mathbf{M} = (\Omega, \mathcal{F}, (X_t)_{t\geq 0}, (P_z)_{z\in E_\Delta})$ un proceso de Markov derecho con tiempo de vida ζ, asociado con $(\mathcal{E}, D(\mathcal{E}))$. Para $B \subset E$ se define el tiempo de la primera llegada del proceso a B (hitting time), τ_B, por

$$\tau_B := \inf\{0 \leq t < \zeta : X_t \in B \text{ o } X_{t-} \in B\},$$

donde $\inf \emptyset := +\infty$.

Teorema 4.8 *Un subconjunto* $N \subset E$ *es* $\mathcal{E}$*-excepcional si y sólo si* $P_m[\tau_{\tilde{N}} < \zeta] = 0$ *para alguna* $\tilde{N} \in \mathcal{B}(E)$ *con* $N \subset \tilde{N}$*.*

Lema 4.9 *Sea* $(\mathcal{E}, D(\mathcal{E}))$ *una forma de Dirichlet en* $L^2(E;m)$ *quasi-regular,* $\mathcal{J}$ *un subespacio lineal denso de* $D(\mathcal{E})$ *que consiste de funciones* $\mathcal{E}$*-quasi continuas, y* ϑ *una medida* σ*-finita en* $\mathcal{B}(E)$*. Si* $u \longmapsto \int u d\vartheta$ *es continua en* $(\widetilde{\mathcal{E}}_1^{1/2}, \mathcal{J})$ *entonces* $\vartheta(N) = 0$ *para todo conjunto* $\mathcal{E}$*-excepcional* N*.*

Las demostraciones de los resultados anteriores se dan en [MR 92] (otras referencias son [S] y [S 99]).

4.3 Ejemplos de formas de Dirichlet quasi-regulares

En esta sección demostraremos que las formas de Dirichlet expuestas en el Capítulo 2 son quasi-regulares.

4.3.1 Formas quasi-regulares finito dimensionales

Consideremos la forma de Dirichlet de la Sección 2.2, donde $E = U \subset \mathbb{R}^d$ es abierto y $m := \sigma\ dx$ con $\sigma \in L^1_{loc}(U, dx)$ y $\sigma \geq 0$, dx-c.d. Veamos que esta forma es quasi-regular:

4.5(i). Debido a la definición de cerrabilidad, $C_0^\infty(U)$ es $\widetilde{\mathcal{E}}_1^{1/2}$-denso en $D(\mathcal{E})$ (ver la Observación 2.3).

4.5(ii). Sea $\{u_n : n \in \mathbb{N}\}$ una enumeración de los elementos de $U \cap \mathbb{Q}^d$. Sea j la función definida en (2.5), extendida a $\mathbb{R}^d$, y para cada $n \in \mathbb{N}$ definamos $j_n(x) := nj(x + u_n)$, $x \in \mathbb{R}^d$. En consecuencia $\{j_n : n \in \mathbb{N}\} \subset C_0^\infty(U)$ y separa puntos de U.

4.5(iii). Sea (K_n) una sucesión de conjuntos compactos en U tal que $K_n \subset K_{n+1}^o$ (interior de K_{n+1}), $n \in \mathbb{N}$, y $U = \cup_{n=1}^\infty K_n$. Sea $u \in C_0^\infty(U)$, entonces supp $u := \overline{\{x : u(x) \neq 0\}}$ es compacto. Si $x \in U$, existe $n(x) \in \mathbb{N}$, tal que $x \in K_{n(x)} \subset K_{n(x)+1}^o$, así hay una bola abierta con centro x y radio $r(x)$, $B_{n(x)}(x, r(x))$, contenida en $K_{n(x)+1}$. Ya que $\{B_{n(x)}(x, r(x)) : x \in U\}$ es una cubierta abierta de supp u, entonces existe una subcubierta finita $\{B_{n(x_i)}(x_i, r(x_i)) : i = 1, ..., k\}$. Sea $N := \max\{n(x_i) : i = 1, ..., k\}$, entonces supp $u \subset K_{N+1}$, debido a que $K_n \subset K_{n+1}^o$, por lo tanto $u \in D(\mathcal{E})_{K_{N+1}}$. De esta forma $C_0^\infty(U) \subset \cup_{n\geq 1} D(\mathcal{E})_{K_n}$ y el resultado se sigue de 4.5(i).

4.3.2 Formas quasi-regulares infinito dimensionales

La forma de Dirichlet de la Sección 2.3 es quasi-regular. En efecto:

4.5(i). Se sigue de la definición de cerrabilidad (ver la Observación 2.3).

4.5(ii). Debido al Teorema de Hahn-Banach, $\{l : l \in E'\}$ separa puntos de E. Más aún veamos que $\{\text{sen}\ l : l \in E'\}$ también separa puntos de E. Sean $x, y \in E$, $x \neq y$, entonces existe $l \in E'$, $l(x) \neq l(y)$. Así $l(x) \neq 0$ o $l(y) \neq 0$. Supongamos que $l(x) \neq 0$. Si $l(y) = 0$ o $l(y) = -l(x)$, entonces sen $l'(x) \neq$ sen $l'(y)$, donde $l'(u) = \pi(2l(x))^{-1} l(u)$, $u \in E$. Supongamos pues que $l(y) \neq 0$ y $l(y) \neq -l(x)$, en consecuencia $0 < |l(y)/l(x)| < 1$ o $0 < |l(x)/l(y)| < 1$. Basta considerar un caso, por ejemplo, $0 < |l(y)/l(x)| < 1$. Defínase el funcional lineal $l'(u) = \pi(l(x))^{-1} l(u)$, $u \in E$, entonces sen $l'(x) = 0 \neq$ sen $l'(y)$. Así, $\{\text{sen}\ l : l \in E'\}$ separa puntos de E y de esto hecho es inmediato que

$$(E \times E) \backslash D = \underset{l \in E'}{\cup} (\text{sen}\ l, \text{sen}\ l)^{-1}((\mathbb{R} \times \mathbb{R}) \backslash D'), \tag{4.1}$$

donde D y D' denotan a las diagonales en $E \times E$ y $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ respectivamente. Ya que $E \times E$ es un espacio métrico separable Lindelöf, la cubierta abierta (4.1) de $(E \times E) \backslash D$ tiene una subcubierta numerable, es decir, existen $l_n \in E'$, $n \in \mathbb{N}$, tales que $\{\text{sen}\ l_n : n \in \mathbb{N}\}$ separa los puntos de E.

4.5(iii). Por la Observación 4.6 basta mostrar que $Cap := \widetilde{Cap}_1$ (es decir que, $h = G_1 1 = 1 \in \mathcal{F}C_b^\infty \subset D(\mathcal{E})$) es tensa y para ello necesitamos el lema que a continuación enunciamos (ver la Proposición 3.1 en [RS 91]).

Lema 4.10 (i) *Sean* $\varphi \in C^1(\mathbb{R})$ *con derivada* φ' *acotada y* $u \in D(\mathcal{E})$. *Entonces* $\varphi \circ u \in D(\mathcal{E})$ *y para cada* $k \in K$

$$\frac{\partial}{\partial k}\varphi(u) = \varphi'(u)\frac{\partial u}{\partial k},$$

donde $\frac{\partial}{\partial k}$ *denota a la cerradura de* $\frac{\partial}{\partial k} : \mathcal{F}C_b^\infty \to L^2(E;\mu)$ *en* $L^2(E;\mu)$.

(ii) *Para cualesquiera* $u, v \in D(\mathcal{E})$,

$$\sum_{k\in K}\left(\frac{\partial}{\partial k}(u\wedge v)\right)^2 \vee \sum_{k\in K}\left(\frac{\partial}{\partial k}(u\vee v)\right)^2 \leq \left(\sum_{k\in K}\left(\frac{\partial u}{\partial k}\right)^2\right) \vee \left(\sum_{k\in K}\left(\frac{\partial v}{\partial k}\right)^2\right).$$

Ya que E es separable existe un subconjunto $\{y_m : m \in \mathbb{N}\}$ de E denso numerable. Como consecuencia del Teorema de Hahn-Banach (ver el Corolario 2 del Capítulo 3 en [DV 78]) para cada $m \in E$ existe $l_m \in E'$ tal que $||l_m||_{E'} = 1$ y $l_m(y_m) = ||y_m||_E$. Nótese que para cada $z \in E$

$$||z||_E = \sup_{m\in\mathbb{N}} l_m(z). \tag{4.2}$$

En efecto, $l_m(z) \leq |l_m(z)| \leq ||z||_E$ para toda $m \in \mathbb{N}$. Por otra parte por ser $\{y_m : m \in \mathbb{N}\}$ denso en E existe una subsucesión $(y_{m_n})_n$ que converge a z. Luego

$$||z||_E = \lim_{n\to\infty}||y_{m_n}||_E = \lim_{n\to\infty} l_{m_n}(y_{m_n}) = \lim_{n\to\infty} l_{m_n}(z) \leq \sup_{m\in\mathbb{N}} l_m(z).$$

Sea $\varphi \in C_b^\infty(\mathbb{R})$ tal que φ es creciente, $\varphi(t) = t$ si $t \in [-1, 1]$ y $||\phi'||_\infty \leq 1$. Para cada $m \in \mathbb{N}$ se define la función $v_m : E \to \mathbb{R}$ por

$$v_m(z) = \varphi(||z - y_m||_E),\ z \in E.$$

El siguiente paso es mostrar que

$$w_n := \inf_{m\leq n} v_m \underset{n\to\infty}{\to} 0, \quad \mathcal{E}\text{-quasi uniformemente en } E. \tag{4.3}$$

Para verificar (4.3) fijemos $m \in \mathbb{N}$ y para cada $n \in \mathbb{N}$ definamos u_n como

$$u_n(z) := \sup_{j\leq n}\varphi(l_j(z - y_m)), \quad z \in E.$$

Se sigue que cada u_n es una versión $\mathcal{E}$-quasi continua de algún elemento en $D(\mathcal{E})$ (pues $\mathcal{F}C_b^\infty \subset D(\mathcal{E})$ y $D(\mathcal{E})$ es cerrado bajo $|\cdot|$, $\vee$, $\wedge$, es decir, si $u, v \in D(\mathcal{E})$, entonces $|u|$, $u\vee v$ y $u\wedge v$ son elementos de $D(\mathcal{E})$) y debido a (4.2), $u_n \uparrow \sup_{j\geq 1}\varphi(l_j(\cdot - y_m)) =$

$\varphi(||\cdot - y_m||_E) = v_m$, cuando $n \to \infty$, en E, por tanto la convergencia de (u_n) a v_m también se da en $L^2(E;\mu)$. Del Lema 4.10, (2.6) e inducción resulta

$$\begin{aligned}\sum_{k\in K}\left(\frac{\partial u_n}{\partial k}\right)^2 &= \sum_{k\in K}\left(\frac{\partial}{\partial k}\sup_{j\le n}\varphi(l_j(\cdot - y_m))\right)^2\\ &\le \sup_{j\le n}\left(\sum_{k\in K}\left(\frac{\partial}{\partial k}\varphi(l_j(\cdot - y_m))\right)^2\right)\\ &= \sup_{j\le n}\left(\sum_{k\in K}\varphi'(l_j(\cdot - y_m))^2 \;{}_{E'}\langle l_j, k\rangle_E^2\right)\\ &\le \sup_{j\le n}\left(\sum_{k\in K}\;{}_{E'}\langle l_j, k\rangle_E^2\right) = \sup_{j\le n}||l_j||^2 = 1,\end{aligned}$$

donde la última desigualdad e igualdad son debidas a que $||\varphi'|| \le 1$ y $||l_j|| = 1$, $j \in \mathbb{N}$. Usando la anterior estimación y (2.10) vemos que $\mathcal{E}(u_n, u_n) \le \mu(X) < \infty$, lo cual implica, según el Lema 1.12, que $v_m \in D(\mathcal{E})$ y que

$$\sum_{k\in K}\left(\frac{\partial v_m}{\partial k}\right)^2 \le 1 \quad \text{para toda } m \in \mathbb{N}. \tag{4.4}$$

Ya que $\{y_m : m \in \mathbb{N}\}$ es denso en E, para $z \in E$, $w_n(z) = \inf_{m\le n} v_m(z) = \inf_{m\le n}\varphi(||z - y_m||_E) \downarrow 0$, cuando $n \to \infty$, en E y en $L^2(E;m)$. Debido a 4.10(ii), (4.4) e inducción obtenemos

$$\sum_{k\in K}\left(\frac{\partial w_n}{\partial k}\right)^2 = \sum_{k\in K}\left(\frac{\partial}{\partial k}\inf_{m\le n} v_m\right)^2 \le \inf_{m\le n}\left(\sum_{k\in K}\left(\frac{\partial v_m}{\partial k}\right)^2\right) \le 1,$$

para toda $n \in \mathbb{N}$. Así, existe una subsucesión $(w_{n_j})_j$ de (w_n) tal que su media de Cesaro $\ddot{w}_n := \frac{1}{n}\sum_{j=1}^n w_{n_j} \to 0$, cuando $n \to \infty$, en $D(\mathcal{E})$ (debido al Lema 1.12) y $\mathcal{E}$-quasi uniformemente (por la Proposición 3.10). Como (w_n) es decreciente, $w_{n_n} \le \frac{1}{n}\sum_{j=1}^n w_{n_j} = \ddot{w}_n$ y $w_n \to 0$, cuando $n \to \infty$, $\mathcal{E}$-quasi uniformemente. De esta manera (4.3) queda demostrado.

Finalmente probaremos 4.5(iii), lo cual concluirá la pueda de que la forma (2.9) es quasi-regular. De (4.3) (y usando el Teorema 3.6(i)) tenemos que para cada $k \in \mathbb{N}$ existe un conjunto cerrado F_k tal que $Cap(F_k^c) < \frac{1}{k}$ y $w_n \to 0$, cuando $n \to \infty$, uniformemente en F_k. Entonces para toda $0 < \varepsilon < 1$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $w_n < \varepsilon$ en F_k, es decir, por definición de w_n,

$$F_k \subset \bigcup_{m=1}^{n} B(y_m, \varepsilon),$$

recuérdese que $\varphi(t) = t$, si $t \in [-1, 1]$. Esto implica que F_k es totalmente acotado y por lo tanto compacto (ver en [GP 65] la página 25). Así, (F_k) es el $\mathcal{E}$-nido buscado.

Captulo 5

Aplicaciones de formas de Dirichlet

Vamos a ver dos aplicaciones de las formas de Dirichlet. En la primera se da una aplicación típica a la teoría del potencial y en la segunda se estudia la solución débil de una ecuación diferencial estocástica (EDE) en un espacio de dimensión infinita.

5.1 Procesos de difusión

Iniciaremos explicando cómo es la asociación entre una forma de Dirichlet y un proceso de difusión, tomando como ejemplo específico al Movimiento Browniano.

5.1.1 Difusión en $\mathbb{R}^d$

Consideremos el generador de una difusión en $\mathbb{R}^d$,

$$\mathcal{L}u(x) := \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{d} a_{ij}(x)\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_j}u(x) + \sum_{i=1}^{d} b_i(x)\frac{\partial}{\partial x_i}u(x), \tag{5.1}$$

donde $u \in C_0^2(\mathbb{R}^d)$, $a_{ij} = a_{ji}$, $i, j = 1, ..., d$. Si las funciones a_{ij} y b_i son continuas y acotadas, entonces existe una solución al problema de martingala para $\mathcal{L}$ iniciando en $x_0 \in \mathbb{R}^d$ (ver por ejemplo el Teorema 1.1 del Capítulo en [B 98]), es decir, existen una medida de probabilidad P y un proceso medible $(X_t)_{t>0}$ tales que $P[X_0 = x_0] = 1$ y

$$u(X_t) - u(X_0) - \int_0^t \mathcal{L}u(X_s)ds,$$

es una martingala bajo P para cada $u \in C_0^2(\mathbb{R}^d)$. Consecuentemente

$$\begin{aligned} E_x[u(X_t)] &= u(x) + E_x\left[\int_0^t \mathcal{L}u(X_s)ds\right] \text{ y} \\ E_x[u^2(X_t)] &= u^2(x) + E_x\left[\int_0^t \mathcal{L}u^2(X_s)ds\right], \end{aligned}$$

y por lo tanto

$$\begin{aligned}
E_x[(u(X_t)-u(X_0))^2] &= E_x[u^2(X_t)]-2E_x[u(X_t)]u(x)+u^2(x)\\
&= u^2(x)+E_x\left[\int_0^t \mathcal{L}u^2(X_s)ds\right]\\
&\quad -2\left(u(x)+E_x\left[\int_0^t \mathcal{L}u(X_s)ds\right]\right)u(x)+u^2(x)\\
&= E_x\left[\int_0^t \mathcal{L}u^2(X_s)ds\right]-2u(x)E_x\left[\int_0^t \mathcal{L}u(X_s)ds\right]\\
&= E_x\left[\int_0^t (\mathcal{L}u^2(X_s)-2u(x)\mathcal{L}u(X_s))ds\right].
\end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned}
\lim_{t\downarrow 0} E_x\left[\frac{(u(X_t)-u(X_0))^2}{t}\right] &= E_x\left[\lim_{t\downarrow 0}\frac{1}{t}\int_0^t (\mathcal{L}u^2(X_s)-2u(x)\mathcal{L}u(X_s))ds\right]\\
&= \mathcal{L}u^2(x)-2u(x)\mathcal{L}u(x).
\end{aligned}$$

Usando esta igualdad y polarización resulta

$$\begin{aligned}
&\lim_{t\downarrow 0}\frac{1}{t}E_x\left[(u(X_t)-u(X_0))(v(X_t)-v(X_0))\right]\\
=\ &\frac{1}{2}\lim_{t\downarrow 0}\frac{1}{t}(E_x[(u(X_t)-u(X_0))^2]+E_x[(v(X_t)-v(X_0))^2]\\
&-E_x[((u-v)(X_t)-(u-v)(X_0))^2)\\
=\ &\frac{1}{2}(\mathcal{L}u^2(x)-2u(x)\mathcal{L}u(x)+\mathcal{L}v^2(x)-2v(x)\mathcal{L}v(x)\\
&-(\mathcal{L}(u-v)^2(x)-2(u-v)(x)\mathcal{L}(u-v)(x)))\\
=\ &(\mathcal{L}uv-u\mathcal{L}v-v\mathcal{L}u)(x)\\
=\ &\sum_{i,j=1}^{d}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_j}a_{ij},
\end{aligned}$$

donde en la última igualdad se ha usado la definición de $\mathcal{L}$, (5.1), y la condición de simetría $a_{ij}=a_{ji}$. De esta forma si m es una medida en $\mathbb{R}^d$ tendremos la interesante relación

$$\lim_{t\downarrow 0}\frac{1}{t}\int_{\mathbb{R}^d} E_x\left[(u(X_t)-u(X_0))(v(X_t)-v(X_0))\right]m(dx)=\sum_{i=1}^{d}\int \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_j}a_{ji}\ m(dx). \tag{5.2}$$

Ahora bien, de la Sección 2.2 sabemos que si m es absolutamente continua con respecto a dx y (2.1) se cumple, entonces el término a la derecha en (5.2) define una forma de Dirchlet (ver (2.2)), la cual es quasi-regular según lo discutido en la Subsección 4.3.1. Sin embargo, esto no implica que la forma esté asociada propiamente con la difusión $(X_t)_{t\geq 0}$ (ver la Definición 4.4), esto ocurre generalmente si m es una medida invariante del proceso $(X_t)_{t\geq 0}$ (ver [S 99]).

5.1.2 Movimiento Browniano

Veamos un ejemplo específico. Sea $E = \mathbb{R}^d$, $m = dx$ la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^d$ y $\mathcal{E}$ la forma de Dirichlet quasi-regular

$$\mathcal{E}(u,v) = \int_{\mathbb{R}^d} \langle \nabla u, \nabla v \rangle dx, \quad u, v \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d),$$

donde $\nabla u := (\partial_1 u, ..., \partial_d u)$ es el gradiente de $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$. En este caso se puede mostrar que

$$\mathcal{E}(u,v) = (-\mathcal{L}u, v), \quad u, v \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d),$$

donde $\mathcal{L}u = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^d \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$ (ver la Proposición 1.2 de la página 157 en [B 98]). De la Observación 1.11 sabemos que $\mathcal{L}$ es el generador asociado a $\mathcal{E}$ y también que es el generador del movimiento Browniano en $\mathbb{R}^d$, por lo tanto la cerradura $(\mathcal{E}, D(\mathcal{E}))$ de $(\mathcal{E}, C_0^\infty(\mathbb{R}^d))$ en $L^2(\mathbb{R}^d; dx)$ es una forma de Dirichlet quasi-regular asociada al movimiento Browniano en $\mathbb{R}^d$. (Nótese que de la Proposición 2.4 se ve inmediatamente que $(\mathcal{E}, D(\mathcal{E}))$ es una forma de Dirichlet y además que dx es una medida invariante para el movimiento Browniano.)

Sea $N = \{y\}$ y para cada $n \in \mathbb{N}$ definamos las funciones $u_n(x) = (1 - n||x-y||)^+$, $x \in \mathbb{R}^d$. Estas funciones son continuas, pertenecen a $D(\mathcal{E})$ y además convergen puntualmente a 1_N, cuando $n \to \infty$. Por otra parte, el gradiente de u_n es

$$\nabla u_n(x) = -n \frac{x-y}{||x-y||} 1_{B(y,1/n)}(x),$$

así que

$$\mathcal{E}(u_n, u_n) = n^2 \int_{\mathbb{R}^d} 1_{B(y,1/n)}(x) dx = n^2 \ \mathrm{Vol}(B(y, 1/n)) = \text{cte. } n^{2-d}.$$

Ya que $\mathcal{E}(u_n, u_n)$ es acotado para $d \geq 2$, del Lema 1.12 se sigue que $1_N \in D(\mathcal{E})$ y por la Proposición 3.10 tenemos que 1_N es $\mathcal{E}$-quasi continua. En consecuencia, N es $\mathcal{E}$-excepcional (ver la Observación 3.3). Así, el Teorema 4.8 implica que $\{y\}$ no es tocado por el movimiento Browniano multidimensional ($d \geq 2$).

Finalmente vemos qué pasa en el caso 1-dimensional. Comenzaremos por demostrar que la función $u \longmapsto \int u d\vartheta$ es continua en $(\widetilde{\mathcal{E}}_1^{1/2}, C_0^\infty(\mathbb{R}))$, donde $\vartheta = \delta_y$. Por ser dicha función lineal, basta verificar su continuidad en $0 \in C_0^\infty(\mathbb{R})$. Definase la función $v(x) = \exp(x-y)$, $x \in \mathbb{R}$. Entonces, para cada $u \in C_0^\infty(\mathbb{R})$,

$$\begin{aligned}
\left|\int u d\vartheta\right| &= |u(y)| = |u(y)v(y)| \\
&= \left|\int_{-\infty}^{y} (uv)'(x)dx\right| \\
&= \left|\int_{-\infty}^{y} v(x)\{u(x)+u'(x)\}dx\right| \\
&\leq \left\{\int_{-\infty}^{y} v(x)^2 dx\right\}^{1/2} \left\{\int_{-\infty}^{y} \{u(x)+u'(x)\}^2 dx\right\}^{1/2} \\
&\leq \text{cte.} \left\{\int_{-\infty}^{y} \{u(x)^2+u'(x)^2\}dx\right\}^{1/2} \\
&\leq \text{cte. } \mathcal{E}_1(u,u)^{1/2}.
\end{aligned}$$

Así $u \longmapsto \int u d\vartheta$ es continua en $(\widetilde{\mathcal{E}}_1^{1/2}, C_0^\infty(\mathbb{R}))$, y como consecuencia del Lema 4.9 resulta que $\vartheta(N) = 0$ para todo conjunto $\mathcal{E}$-excepcional N. En virtud de que $\vartheta(\{y\}) > 0$, entonces el conjunto $\{y\}$ no puede ser $\mathcal{E}$-excepcional. De esta manera, $\{y\}$ es tocado por el movimiento Browniano 1-dimensional con probabilidad positiva, debido al Teorema 4.8.

5.2 EDE con espacio de estados infinito dimensional

En esta sección trabajaremos con la forma de Dirichlet descrita en la Sección 2.3, en donde teníamos el siguiente escenario: E es un espacio de Banach real separable, μ es una medida finita en $\mathcal{B}(E)$ soportada en todo E y $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle_H)$ es un espacio de Hilbert real separable que cumple

$$E' \subset H' \equiv H \subset E \ \text{ densa y continuamente.} \tag{C.1}$$

Supongamos también que

$$\begin{array}{c}\text{existe un subespacio lineal denso } K \subset E' \text{ que consiste} \\ \text{de elementos bien-}\mu\text{-admisibles en } E.\end{array} \tag{C.2}$$

Así, por la Proposición 2.13, la forma

$$\mathcal{E}(u,v) = \int_E \langle \bigtriangledown u, \bigtriangledown v\rangle d\mu, \quad u,v \in \mathcal{F}C_b^\infty, \tag{5.3}$$

es cerrable en $L^2(E;\mu)$ y su cerradura $(\mathcal{E}, D(\mathcal{E}))$ es una forma de Dirichlet simétrica. En esta sección probaremos que el proceso de difusión $\mathbf{M} = (\Omega, \mathcal{F}, (X_t)_{t\geq 0}, (P_z)_{z\in E})$ asociado con $(\mathcal{E}, D(\mathcal{E}))$ (ver la Definición 4.4) resuelve débilmente una ecuación diferencial estocástica del tipo

$$\left.\begin{array}{rcl} dX_t &=& dW_t + \beta(X_t)dt, \\ X_0 &=& z, \end{array}\right\} \tag{5.4}$$

$z \in E$, respecto a P_z, donde $(W_t)_{t\geq 0}$ es un *movimiento Browniano E-valuado sobre H*. Es decir, para cada $z \in E$ $\mathcal{E}$-q.d., $W_t - W_s$ es independiente de $\mathcal{F}_s$, respecto a P_z, para toda $0 \leq s < t$ y ${}_{E'}\langle k, W_t - W_s\rangle_E$, es una variable aleatoria Gaussiana con media cero y varianza $(t-s)||k||_H^2$, para toda $k \in E'$. Y la función $\beta : E \to E$

$$\begin{array}{ll} (i) & \text{es } \mathcal{B}(E)/\mathcal{B}(E)\text{-medible,} \\ (ii) & {}_{E'}\langle k, \beta\rangle_E = \beta_k,\ \mu\text{-c.d. para toda } k \in K(\subset E') \text{ y} \\ (iii) & \int \|\beta\|_E^2 d\mu < \infty. \end{array} \tag{C.3}$$

(La función β_k se da en la Definición 2.10.)

5.2.1 Solución de la EDE

Comencemos con el siguiente resultado.

Lema 5.1 *Si $u \in L^2(E;\mu)$, entonces*

$$E_z\left[\int_0^t |u|(X_s)ds\right] < \infty$$

para toda $t \geq 0$ y para cada $z \in E$ $\mathcal{E}$-q.d.

Demostracin. Sean $z \in E$ y $t \geq 0$. Entonces $e^{t-s} - 1 \geq 0$ para toda $0 \leq s \leq t$, y por tanto

$$\begin{aligned} e^t \int_0^\infty e^{-s} E_z\left[|u|(X_s)\right] ds - E_z\left[\int_0^t |u|(X_s)ds\right] &= \\ \int_0^t (e^{t-s}-1) E_z\left[|u|(X_s)\right] ds + e^t \int_t^\infty e^{-s} E_z\left[|u|(X_s)\right] ds &\geq 0. \end{aligned}$$

La afirmación se sigue del hecho de que la función $R_1|u|(z) := \int_0^\infty e^{-s} E_z\left[|u|(X_s)\right] ds$ es $\mathcal{E}$-quasi continua (ver Proposición 4.2.8 de [MR 92]). ∎

Haciendo uso de la condición $(C.3)(iii)$ y del Lema 5.1 obtenemos que para todo $t \geq 0$,

$$E_z\left[\int_0^t ||\beta||_E(X_s)ds\right] < \infty, \tag{5.5}$$

para cada $z \in E$ $\mathcal{E}$-q.d. Por lo tanto, el conjunto

$$\Omega_0 := \left\{\int_0^t ||\beta||_E(X_s)ds < \infty \ \text{ para toda } t > 0\right\}.$$

tiene P_z-medida uno para cada $z \in E$ $\mathcal{E}$-q.d., debido a (5.5). Ahora definamos para cada $t \geq 0$,

$$N_t := 1_{\Omega_0} \int_0^t \beta(X_s)ds \tag{5.6}$$

donde la integral es en el sentido de Bochner (ver la Sección 5 del Capítulo 5 de [Yo 80]). Entonces $N : \Omega \to C([0,\infty[, E)$, $(N_t)_{t\geq 0}$ es $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$-adaptada (pues $(X_t)_{t\geq 0}$ es continuo a la derecha) y para cada $k \in K$,

$$\begin{aligned} {}_{E'}\langle k, N_t\rangle_E &= \int_0^t {}_{E'}\langle k, \beta(X_s)\rangle_E ds \\ &= \int_0^t \beta_k(X_s)ds, \ \ t \geq 0, \ P_z\text{-c.s} \end{aligned} \tag{5.7}$$

para toda $z \in E$ $\mathcal{E}$-q.d., donde la primera igualdad se obtuvo de una propiedad de la integral de Bochner (ver el Corolario 2 de la página 134 de [Yo 80]) y la última de la condición $(C.3)(ii)$.

El resultado principal se sigue de la siguiente proposición, donde es necesario suponer que

$$\int_E {}_{E'}\langle k, z\rangle_E^2 d\mu < \infty \ \text{ para toda } k \in K, \tag{C.4}$$

es decir, que ${}_{E'}\langle k, \cdot\rangle_E \in L^2(E,\mu)$. (Más aún se puede demostrar que ${}_{E'}\langle k, \cdot\rangle_E \in D(\mathcal{E})$ para toda $k \in K$ (ver [R 92])).

Proposicin 5.2 *Sea $k \in K$, entonces*

$${}_{E'}\langle k, X_t\rangle_E - {}_{E'}\langle k, X_0\rangle_E = W_t^k + \int_0^t \beta_k(X_s)ds, \ \ t \geq 0, \ P_z\text{-a.e}$$

para cada $z \in E$ $\mathcal{E}$-q.d., donde $(W_t^k, \mathcal{F}_t, P_z)$ es una martingala continua y, si $||k||_H = 2^{-1/2}$, entonces W^k es un movimiento Browniano (1-dimensional) que comienza en el origen.

Demostracin. La demostración, es consecuencia inmediata de la descomposición de Fukushima y, se da en el Teorema 5.3 de [AR 91]. ■

Teorema 5.3 *Bajo las suposiciones $(C.1)$, $(C.2)$ y $(C.3)$ existe $W : \Omega \to C([0,\infty[, E)$ tal que para cada $z \in E$ $\mathcal{E}$-q.d., $W = (W_t)_{t\geq 0}$, es un $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$-movimiento Browniano respecto a P_z que comienza en $0(\in E)$, con covarianza $2\langle\cdot,\cdot\rangle_H$, y tal que para cada $z \in E$ $\mathcal{E}$-q.d.*

$$X_t = z + W_t + \int_0^t \beta(X_s)ds, \ \ t \geq 0, \ \ P_z\text{-c.s.} \tag{5.8}$$

Demostracin. Sea N_t como en (5.6) y definase $W_t := X_t - X_0 - N_t$, $t \geq 0$. Entonces $W := (W_t)_{t\geq 0}$ tiene trayectorias continuas, inicia en cero y es $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$-adaptado. De de la Proposición 5.2 y de (5.7) tenemos que para cada $k \in K$

$$\begin{aligned} {}_{E'}\langle k, X_t\rangle_E - {}_{E'}\langle k, X_0\rangle_E &= W_t^k + \int_0^t \beta_k(X_s)ds \\ &= W_t^k + {}_{E'}\langle k, N_t\rangle_E, \end{aligned}$$

es decir, $W_t^k = {}_{E'}\langle k, X_t - X_0 - N_t\rangle_E = {}_{E'}\langle k, W_t\rangle_E$, y la igualdad (5.8) se sigue de la condición $(C.2)$.

Debido a la Proposición 5.2 podemos suponer que para cada $k \in K$, $(W_t^k, \mathcal{F}_t, P_z)$ es un movimiento Browniano en $\mathbb{R}$ para cada $z \in E$ $\mathcal{E}$-q.d. Ya que

$$W_t^k = {}_{E'}\langle k, W_t\rangle_E, \tag{5.9}$$

entonces para cada $z \in E$ $\mathcal{E}$-q.d., la variable aleatoria ${}_{E'}\langle k, W_t - W_s\rangle_E$ es Gaussiana de media cero y covarianza $(t-s)||k||_H^2$, respecto a P_z, para toda $0 \leq s < t$ y $k \in K$. Por $(C.2)$, lo mismo es cierto para toda $k \in E'$. Ya que para $0 \leq s < t$, la σ-álgebra $\{(W_t - W_s)^{-1}(B) : B \in \mathcal{B}(E)\}$ en Ω es igual a la σ-álgebra generada por $\{{}_{E'}\langle k, W_t - W_s\rangle_E : k \in K\}$ en Ω. De la Proposición 5.2 y de (5.9) se sigue también que $W_t - W_s$ es independiente de $\mathcal{F}_s$. Como $W = (W_t)_{t\geq 0}$ tiene trayectorias continuas, debido a la primera parte, entonces es un $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$-movimiento Browniano sobre E bajo H (ver la página 40). ■

Proposicin 5.4 *Supongamos que E es un espacio de Hilbert real separable y además que existe otro espacio de Hilbert $(H_0, \langle\cdot,\cdot\rangle_{H_0})$ tal que $E' \subset H_0$ densamente por un mapeo de Hilbert-Schmidt, y que existe $c \in]0, \infty[$ tal que*

$$\int \beta_k^2 d\mu \leq c||k||_{H_0}^2 \quad \textit{para toda } k \in K. \tag{5.10}$$

Entonces existe una función $\beta : E \to E$ que cumple $(C.3)$.

Demostracin. Por hipótesis, $E' \subset H_0 \equiv H_0' \subset E$ densamente por un mapeo de Hilbert-Schmidt. De la Observación 6.8 en [AR 91] se sigue que existe una función $\beta : E \to E$ que cumple $(C.3)(i)$-(ii). El hecho de que $H_0 \subset E$ densamente por un mapeo de Hilbert-Schmidt implica, además, que se puede encontrar una base ortonormal $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ de $(H_0, \langle\cdot,\cdot\rangle_{H_0})$ contenida en K ($\subset E' \subset H_0 \equiv H_0' \subset E$, ver $(C.2)$) y $\lambda_n > 0$, $n \in \mathbb{N}$, con $\sum_{n=1}^\infty \lambda_n^2 < \infty$, tales que $\{e_n/\lambda_n : n \in \mathbb{N}\}$ es una base ortonormal de $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle_E)$ que cumple

$$\langle e_n, h\rangle_E = \lambda_n^2 \langle e_n, h\rangle_{H_0} = \lambda_n^2 \ {}_{E'}\langle e_n, h\rangle_E, \tag{5.11}$$

para cualesquiera $h \in H_0 (\subset E)$ y $n \in \mathbb{N}$. Así, usando la relación de Parseval, (5.11), $(C.3)(ii)$ y (5.10), obtenemos que

$$\begin{aligned}
\int \|\beta\|_E^2 d\mu &= \sum_{n=1}^\infty \int \langle e_n/\lambda_n, \beta\rangle_E^2 d\mu \\
&= \sum_{n=1}^\infty \int \lambda_n^2 \ {}_{E'}\langle e_n, \beta\rangle_E^2 d\mu \\
&= \sum_{n=1}^\infty \int \lambda_n^2 \beta_k^2 d\mu \leq c \sum_{n=1}^\infty \lambda_n^2 < \infty,
\end{aligned}$$

como se quería probar. ■

5.2.2 Ejemplo de solución de una EDE

El ejemplo de solución de una EDE que consideraremos, es en el que la función β "proviene" de un mapeo lineal en H.

Para ser precisos sea *dado* un espacio de Hilbert real H separable de dimensión infinita y A un operador auto-adjunto en H con $A \geq cI_H$ para alguna $c \in]0, \infty[$. Queremos encontrar una solución débil de la ecuación diferencial estocástica

$$\left.\begin{array}{rcl} dX_t &=& dW_t + A(X_t)dt, \\ X_0 &=& z, \end{array}\right\} \tag{5.12}$$

donde $(W_t)_{t\geq 0}$ es un movimiento Browniano sobre H. La expresión (5.12) es informal ya que, en general, $(X_t)_{t\geq 0}$ no toma valores en el dominio $D(A)$ de A.

Para aplicar los resultados de la Sección 5.2.1 necesitamos un espacio de Banach E real separable para el que se cumpla la condición $(C.1)$. Nótese que $H \subsetneqq E$, pues $(W_t)_{t\geq 0}$ no puede construirse de manera que tome valores en H, debido a que $\dim(H) = \infty$. Y, además, necesitamos una medida finita μ sobre $\mathcal{B}(E)$. Así podemos aplicar el Teorema 5.3 a la cerradura de la forma (5.3).

Elección de E y μ: Sea $(H_0, \langle\cdot,\cdot\rangle_{H_0})$ dado por $H_0 := D(A)$ y $\langle\cdot,\cdot\rangle_{H_0} := \langle A\cdot, A\cdot\rangle_H$, y sean $\lambda_n > 0$, $n \in \mathbb{N}$, tales que $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2 < \infty$. Sea $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ una base ortonormal de H_0 y definase $H_1 := \{h \in H_0 : \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{-2} \langle e_n, h\rangle_{H_0}^2 < \infty\}$ con producto interno

$$\langle x, y\rangle_{H_1} := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n^2} \langle e_n, x\rangle_{H_0} \langle e_n, y\rangle_{H_0}, \quad x, y \in H_1.$$

Entonces $(H_1, \langle\cdot,\cdot\rangle_{H_1})$ es un espacio de Hilbert real separable con base ortonormal $\{\lambda_n e_n : n \in \mathbb{N}\}$. Así $H_1 \subset H_0$ densamente por un mapeo de Hilbert-Schmidt. Definamos $E := H_1'$, el cual cumple

$$E' = H_1 \subset H_0 \subset H \equiv H' \subset H_0' \subset H_1' = E \;\text{ densa y continuamente.}$$

De esta forma, $(C.1)$ se verifica.

Sea $\widetilde{\mu}$ una medida cilíndrica en H tal que

$$\int_H \exp(i\langle h', h\rangle_H) \widetilde{\mu}(dh') = \exp\left(-\frac{1}{2} ||A^{-1/2}h||_H^2\right), \quad h \in H.$$

Tal medida existe debido al Teorema de Bochner en $\mathbb{R}^d$ clásico, y además se extiende ("lift") a una medida μ en $(E, \mathcal{B}(E))$ (ver Teorema 3.2 de [Y 89]).

Sea $K := E'$. Para ver que se cumple $(C.2)$ basta verificar que todo elemento de K es bien-μ-admisible en E. Pero si $h \in H$, entonces existe una sucesión (l_n) en E' tal que $l_n \to h$, cuando $n \to \infty$, en H y podemos definir $X_h := \lim_{n\to\infty} {}_{E'}\langle l_n, \cdot\rangle_E$, en $L^2(E, \mu)$. Si $l \in E'$ $(\subset H)$, entonces

$$\begin{array}{rcl} \displaystyle\int_E {}_{E'}\langle l, z\rangle_E X_h(z) \mu(dz) &=& \displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_E {}_{E'}\langle l, z\rangle_E \; {}_{E'}\langle l_n, z\rangle_E \mu(dz) \\ &=& \displaystyle\lim_{n\to\infty} \langle A^{-1/2}l, A^{-1/2}l_n\rangle_H \\ &=& \langle A^{-1/2}l, A^{-1/2}h\rangle_H \\ &=& \langle l, A^{-1}h\rangle_H = {}_{E'}\langle l, A^{-1}h\rangle_E, \end{array} \tag{5.13}$$

donde en la segunda igualdad hemos usado que

$$\int_E \exp(i_{E'}\langle l, h\rangle_E)\mu(dl) = \exp\left(-\frac{1}{2}||A^{-1/2}h||_H^2\right), \quad h \in H, \tag{5.14}$$

y en la cuarta igualdad que A es auto-adjunto y cumple $A \geq cI$.

Si $k \in K(\subset H \subset E)$, entonces $h := Ak \in H$ y

$$_{E'}\langle l, k\rangle_E = \int_E {}_{E'}\langle l, z\rangle_E X_{Ak}(z)\mu(dz), \quad l \in E'(\subset H).$$

Apartir de esto y de la Proposición 5.5 en [AR 90] obtenemos que k es bien-μ-admisible y, más aún, que $\beta_k = -X_{Ak}$.

Sea $k \in K$. Procediendo como en (5.13) tenemos

$$\int \beta_k^2 d\mu = \int X_{Ak}^2 d\mu = ||A^{-1/2}k||_H^2 \leq c^{-1}||k||_{H_0}^2,$$

lo cual arroja a $(C.3)$ como consecuencia de la Proposición 5.4, es decir, existe una función $\beta : E \to E$, que es $\mathcal{B}(E)/\mathcal{B}(E)$-medible, cumple $_{E'}\langle k, \beta\rangle_E = \beta_k = -X_{Ak}$, μ-c.d. para toda $k \in K(\subset E')$ y $\int \|\beta\|_E^2 d\mu < \infty$. Finalmente, debido a (5.14), $\int_E {}_{E'}\langle k, z\rangle_E^2 \mu(dz) = ||A^{-1/2}k||_H^2 < \infty$ para toda $k \in K$, y así $(C.4)$ también se cumple.

Por otra parte, existe un proceso de difusión $\mathbf{M} = (\Omega, \mathcal{F}, (X_t)_{t\geq 0}, (P_z)_{z\in E})$ asociado a $(\mathcal{E}, D(\mathcal{E}))$, donde

$$\mathcal{E}(u, v) = \int_E \langle \bigtriangledown u, \bigtriangledown v\rangle d\mu, \quad u, v \in \mathcal{F}C_b^\infty,$$

pues $(\mathcal{E}, D(\mathcal{E}))$ es quasi-regular (ver la Sección 2.3 y el Teorema 4.7). Entonces, debido al Teorema 5.3, para cada $z \in E$ $\mathcal{E}$-q.d. el proceso $(X_t)_{t\geq 0}$ es solución débil de la ecuación diferencial estocástica

$$\left.\begin{array}{rcl} dX_t &=& dW_t + \beta(X_t)dt, \\ X_0 &=& z, \end{array}\right\} \tag{5.15}$$

respecto a P_z, donde $(W_t)_{t\geq 0}$ es un movimiento Browniano E-valuado sobre H. La ecuación (5.15) es la versión rigurosa de la ecuación (5.12) y β puede ser considerada como una extensión estocástica de A (ver [I 84]) que no es necesariamente lineal.

Bibliography

[AR 90] S. Albeverio and M. Röckner, *Classical Dirichlet Forms on Topological Vector Spaces-Closability and Cameron-Martin Formula*, Journal of functional analysis **88**, 1990, 395-436.

[AR 91] S. Albeverio and M. Röckner, *Stochastic differential equations in infinite dimensions: solutions via Dirichlet forms*, Probab. Th. Rel. Fields **89**, 1991, 347-386.

[ARW 00] S. Alveverio, B. Rüdiger and J-L. Wu, *Invariant measures and Symmetry property of Lévy type operators*, Potential Analysis **13**, 2000, 147-168.

[B 98] R. F. Bass, Diffusions and Elliptic operators, Springer 1998.

[DV 78] C. L. DeVito, Functional Analysis, Academic Press 1978.

[Fi 99] P. J. Fitzsimmons, *On the quasi-regularity of Semi-Dirichlet forms*, preprint 1999.

[F 80] M. Fukushima, Dirichlet forms and Markov processes, North Holland 1980.

[GP 65] C. Goffman and G. Pedrick, A First Course in Functional Analysis, Prentice-Hall 1965.

[I 84] K. Itô, *Infinite dimensional Ornstein-Uhlenbeck processes*, Stochastic Analysis. Eds. K. Itô, North Holland 1984, 197-224.

[Kuo 75] H. Kuo, Gaussian measures in Banach spaces, Lect. Notes in Math. **463**, Springer 1975.

[MR 92] Z. M. Ma and M. Röckner, An introduction to the theory of (non symmetric) Dirichlet forms, Springer 1992.

[RS 80] M. Reed and B. Simon, Methods of Modern Mathematical Physics I. Functional Analysis, Academic Press 1980.

[RS 91] M. Röckner and B. Schmuland, *Tightness of general $C_{1,p}$-capacities on Banach spaces*, J. Funct. Anal. 1991.

[R 92] M. Röckner, *General Theory of Dirichlet Forms and Applications*, Lectures given at the 1st Session of the Centro Internazionale Matematico Estivo (CIME) held in Varenna, Italy, 1992, 129-193.

[S] B. Schmuland, *A Dirichlet form primer*, preprint.

[S 99] B. Schmuland, *Dirichlet forms: some infinite-dimensional examples*, The Canadian Journal of Statistics, Vol. **27**. No. 4, 1999, 683-700.

[Y 89] J. A. Yan, *Generalizations of Gross' and Minlos' theorems*, Séminaires de Probabilities XXII. Eds. J. Azema, P.A. Meyer, M. Yor, Lect. Notes in Math. **1372**, Springer 1989, 395-404.

[Yo 80] K. Yosida, Functional Analysis, Springer-Verlag 1980.