Juegos de Azar y Probabilidad/Estadística

Día 1.

Puro Azar	Mixtos	Estrategia
Ruleta	Poker	Ajedrez
Dados	Bridge	Damas
Lotería	Dominó	Damas Chinas
	Blackjack	Go
	Ludo	
	Backgamon	

Lotería tradicional: Se compra un boleto con números impresos. Poca variedad de elección. Premio fijo.

Melate, loto o lotería primitiva: Se seleccionan 6 números de 56 (melate) o 49 (la mayoría de los lotos). Durante el sorteo se escogen 6 números al azar y gana el o los boletos que tengan esos números (premio principal). Este tipo de lotería parece haberse originado en Genova, Italia, en el siglo XVII y se ha vuelto muy popular en todo el mundo.

¿Cuál es la probabilidad de ganar?
Tenemos que calcular el número de boletos distintos que se pueden hacer, seleccionando 6 números a partir de 56:

$$\frac{56*55*54*53*52*51}{6*5*4*3*2*1} = 32{,}468{,}436$$

Por lo tanto la probabilidad de acertar es el inverso de este número:

0.00000000308

Para hacernos una idea de cuán pequeño es este número, es más probable lanzar 24 Aguilas seguidas con una moneda que ganar al Melate.

Números Combinatorios.
En general, si tenemos un conjunto de *n* objetos y deseamos seleccionar un subconjunto de tamaño *k*, ¿de cuántas manera podemos hacerlo si no repetimos ningún objeto?

Con orden. Si nos interesa el orden en el cual aparecen los objetos, el primero puede ser cualquiera de los objetos, es decir, tenemos *n* maneras de escogerlo. Una vez escogido éste nos quedan *(n-1)* maneras de escoger el segundo, porque no se permiten repeticiones. Para el tercero tendremos *(n-2)* y así sucesivamente. Estos números los multiplicamos porque a cada selección del primero le puede corresponder cualquier selección del segundo, y así sucesivamente. Resumiendo tenemos

$$n\times(n-1)\times\cdots\times(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!},$$

donde $n! = n\times(n-1)\times\cdots\times 3\times 2\times 1$. Este número se conoce como las *variaciones* de *n* objetos tomados de *k* en *k*.

Un caso particular es aquel en el cual queremos seleccionar todos los objetos, es decir k=n. En este caso el denominador de la expresión anterior es 1 (por convención 0!=1) y tenemos *n!* maneras de ordenar los objetos del conjunto. Hablamos entonces de las *permutaciones* de los n objetos.

Sin orden. Si nos interesan los objetos seleccionados pero no el orden en el cuál fueron escogidos (es el caso del Melate) cualquier permutación de los objetos seleccionados tiene los mismos números. Por lo tanto, el resultado anterior, correspondiente al número de variaciones, lo debemos dividir entre el número de permutaciones de k objetos:

$$\frac{n\times(n-1)\times\cdots\times(n-k+1)}{k!}=\frac{n!}{k!(n-k)!}\,.$$

Estos números se conocen como números combinatorios y se denotan $\binom{n}{k}$. Hablamos de las combinaciones de n objetos tomados de k en k.

Triángulo de Pascal.

n = 0										1										
n = 1									1		1									
n = 2								1		2		1								
n = 3							1		3		3		1							
n = 4						1		4		6		4		1						
n = 5					1		5		10		10		5		1					
n = 6				1		6		15		20		15		6		1				
n = 7			1		7		21		35		35		21		7		1			
n = 8		1		8		28		56		70		56		28		8		1		
n = 9	1		9		36		84		126		126		84		36		9		1	

Los números en la n-ésima fila son los números combinatorios $\binom{n}{k}$ para $0 \le k \le n$. El método de construcción del triángulo se basa en la siguiente propiedad:

$$\binom{n}{k}=\binom{n-1}{k-1}+\binom{n-1}{k}$$

que podemos demostrar de la siguiente manera. El lado izquierdo representa el número de subconjuntos de k objetos que podemos formar con los elementos de un conjunto de tamaño n. Si fijamos uno de estos elementos, el primer sumando del lado derecho es el número de subconjuntos de tamaño k que incluyen el elementos que fijamos, mientras que el segundo representa el número de subconjuntos de tamaño k que no lo incluyen.

El triángulo de Pascal tiene numerosas propiedades interesantes. Como ejemplo mostramos una sola de ellas. Si sumamos las filas obtenemos los números 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, etc. Es decir, la suma de la n-ésima fila es 2^n y por lo tanto tenemos

$$2^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{n}$$

Esta relación se puede demostrar también a partir de la fórmula para el binomio de Newton.

Números Consecutivos

Con frecuencia en los resultados se encuentran dos o más números consecutivos. Por ejemplo, si los números ganadores son 2 14 15 16 38 45, tenemos tres números consecutivos. Con frecuencia se piensa que esto es una indicación de que hay algún tipo de sesgo al seleccionar los números. Veamos si esto es cierto.

Supongamos que escogemos *r* números al azar de una sucesión de *n*, ¿Cuál es la probabilidad de que haya dos números consecutivos? Para resolver esto basta contar de cuántas maneras *s* podemos seleccionar *r* objetos de *n* en sucesión, de modo que haya al menos un objeto no seleccionado como separación entre cualquier par de objetos seleccionados. La observación crucial es esta: Si ignoramos los r-1 *separadores* necesarios, tenemos una situación de selección sin restricciones de *r* objetos entre $n - (r - 1)$. Recíprocamente, cualquier selección de *r* objetos entre $n - (r - 1)$ se puede convertir en una selección de *r* objetos de *n* sin números consecutivos, añadiendo los r-1 *separadores*. Por lo tanto el número que buscamos es

$$\boldsymbol{s} = \binom{\boldsymbol{n} - (\boldsymbol{r} - 1)}{\boldsymbol{r}}$$

Por lo tanto, la probabilidad de que no haya números consecutivos en los números ganadores es

$$\boldsymbol{p} = \binom{\boldsymbol{n} - (\boldsymbol{r} - 1)}{\boldsymbol{r}} \Big/ \binom{\boldsymbol{n}}{\boldsymbol{r}}$$

En el caso del Melate esto es 0.5547, es decir que en el 45% de los casos, aproximadamente, esperaríamos tener números consecutivos.

Ejercicio. ¿Puedes calcular la probabilidad de tener al menos tres números consecutivos? ¿y de tener dos pares de números consecutivos?

Estrategias.

¿Hay estrategias que nos permitan aumentar las probabilidades de ganar?

Si, ¡comprar más boletos! El problema es que mientras más compramos, más arriesgamos y en promedio más perdemos. Pero no siempre.

Las loterías tipo Loto, en general no tienen un premio fijo para los boletos ganadores. Se basan en un sistema mutual de reparto, por medio del cual se distribuye una proporción del dinero apostado entre los ganadores. Sin embargo, si en un sorteo no hay ganadores el dinero se acumula para el próximo sorteo. Esto permite garantizar montos (mínimos) para el premio mayor del sorteo. Sin embargo, el monto que esperamos ganar por boleto debe ser negativo. ¿Qué quiere decir esto?

Para simplificar supongamos que hay un solo premio, digamos 160,000,000 y el boleto cuesta $15. Supongamos también que el premio no se comparte. Entonces, con probabilidad $1/32{,}468{,}436$ ganamos 160,000,000 y con probabilidad 1- $1/32{,}468{,}436$ perdemos 15. El valor esperado es, entonces

$$\frac{160000000}{32468436} - \frac{32468435}{32468436} \times 15 = -10.07$$

El monto que esperamos ganar por boleto es negativo, es decir, el monto total de los premios dividido entre el número de boletos vendidos debe ser menor que el costo del boleto.
Sin embargo, hay ocasiones (muy raras) en las cuales el 'valor esperado' de un boleto es positivo. En 1992 se dio una situación de este tipo. Unos inversionistas australianos observaron que la Lotería de Virginia no satisfacía el principio que mencionamos. Esta lotería requiere seleccionar 6 números de 44, de modo que hay 7,059,052 boletos distintos posibles. El precio de cada uno es de US$ 1, de modo que para comprar todos los boletos posibles se requieren algo más de 7 millones de dólares. El premio por acertar 6 números era de 27 millones y sumando los premios secundarios el total era de 27,918,561. Si dividimos

$$\frac{27918561}{7059052} = 3.955$$

de modo que si compramos todos los boletos posibles, esperaríamos ganar 2.955 dólares por cada dólar invertido, siempre que no tengamos que compartir con nadie más.
Los australianos consiguieron 2500 personas dispuestas a invertir 3,000 dólares en promedio cada una. Si el esquema funcionaba, cada una recibiría unos 11,800 dólares.
Sin embargo, existía el riesgo de tener que compartir el premio con otro ganador. Revisando la historia del sorteo observaron que de 170 veces que se había jugado la lotería,

- en 120 de ellas no hubo ganadores,
- en 40 hubo un solo ganador y
- en las 10 restantes dos ganadores compartieron el premio.

Si consideramos sólo el premio mayor de 27 millones, podemos recalcular el monto que esperamos ganar de la siguiente manera:

$$\frac{120}{170} \times 27000000 + \frac{40}{170} \times 13500000 + \frac{10}{170} 6750000 = 22632352.95$$

y dividiendo por el número de boletos tenemos una ganancia esperada por boleto de 2.20 dólares.
La compra de los boletos fue una pesadilla y al final sólo lograron comprar unos 5 millones de boletos. Sin embargo ganaron, aunque tardaron semanas en encontrar el boleto ganador! Luego de una batalla legal lograron que les pagaran el premio.

En el caso del Melate ¿cuán grande debería ser el premio para que haya un valor esperado positivo?
Tenemos 32,468,435 de boletos y cada boleto vale $15, de modo que haría falta un premio de $487,026,525. Actualmente el premio es de 130 millones para Melate y 166 para Revancha.

Hay otro punto interesante que observar en relación a las posibles estrategias. La gente no selecciona los números al azar y por lo tanto, no todos los boletos tienen igual probabilidad de ser comprados.
Para ver un ejemplo de esto consideramos una lotería más simple que el Melate, y por lo tanto más sencilla de analizar. Se trata de Pick3 de la lotería de New Jersey. El juego consiste en seleccionar tres números entre los dígitos 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9. Es posible repetir números de modo que hay 1,000 combinaciones posibles: los números de 000 a 999. Para ganar es necesario acertar los tres números en orden, aunque hay una opción de apostar a cualquier permutación de los números seleccionados ganando menos.

Esta lotería comenzó el año 1975. Vamos a explorar los números ganadores en todos los sorteos de ese año. (el resto del análisis se hizo usando el software R)

Día 2.

Juego de Dados (Chuck-a-luck).

Escoges un número del 1 al 6 y apuestas 10 pesos. Si no sale el número que escogiste, pierdes los 10 pesos. Si sale el número te devuelven tus 10 pesos y ganas 10 pesos multiplicados por el número de veces que salga tu número, o sea que si tu número sale tres veces, ganas 30 pesos. ¿Deberías jugar este juego?

Es imposible predecir si vamos a ganar o no, ni cuánto vamos a ganar si ganamos. Para tomar una decisión debemos calcular cuanto esperamos ganar o perder en un juego en promedio si jugamos muchas veces. Esto se conoce como el *valor esperado* del juego. Para esto debemos multiplicar cada ganancia o pérdida posible por la probabilidad de que ocurra y luego sumar todos los resultados.

En este juego hay cuatro resultados posibles: perder \$10 o ganar \$10, \$20 o \$30. Las probabilidades respectivas son

$$\left(\frac{5}{6}\right)^3 = 0.5787\,; \quad 3\times\frac{1}{6}\times\left(\frac{5}{6}\right)^2 = 0.3472\,; \quad 3\times\left(\frac{1}{6}\right)^2\times\frac{5}{6} = 0.0694\,; \quad \left(\frac{1}{6}\right)^3 = 0.0047$$

El valor esperado es

$$-10\times0.5787 + 10\times0.3472 + 20\times0.0694 + 30\times0.0047 = -0.645$$

O sea que en promedio perdemos 64.5 céntimos cada vez que jugamos 10 pesos es decir, 6.45%.

El valor esperado se calcula multiplicando cada resultado posible por su probabilidad de ocurrir y luego sumando estos productos. Por ejemplo, si los resultados posibles y sus probabilidades están descritos por la siguiente tabla

Valores	x_1	x_2	x_3	…	x_n	
Probabilidades	p_1	p_2	p_3	…	p_n	

el valor esperado será

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i$$

Un juego es *justo* si el valor esperado es 0. Es *desfavorable* si el valor esperado es negativo y *favorable* si es positivo.

En un casino todos los juegos de azar puro son desfavorables. En los juegos que permiten una estrategia no es fácil calcular el valor esperado.

Cálculo de valores esperados para varios ejemplos (ejercicio)

La Ruina del Jugador.

A y B juegan una sucesión de juegos en los cuales A gana con probabilidad *p* y pierde con probabilidad *q = 1 - p*. El capital inicial de A es *n*, el de B *m*, de modo que el total es *m + n*. A y B deciden jugar hasta que alguno de los dos se arruine

Llamemos *r(n,n+m) = r(n)* la probabilidad de que A se arruine si tiene capital inicial *n* y B tiene capital inicial *m*.
Consideramos los posibles resultados del primer juego. Si A gana, lo que ocurre con probabilidad *p*, su capital es ahora *n+1*, y su probabilidad de ruina es *r(n+1)*. En cambio si A pierde (con probabilidad *1-p*), su capital pasa a *n-1* y su probabilidad de ruina es ahora *r(n-1)*. Por lo tanto tenemos la siguiente ecuación

$$r(n) = p \times r(n+1) + q \times r(n-1),$$

pero como *p + q = 1* esto es lo mismo que

$$(p+q) \times r(n) = p \times r(n+1) + q \times r(n-1).$$

Reagrupando términos,

$$p \times (r(n+1) - r(n)) = q \times (r(n) - r(n-1)).$$

Llamamos ahora $\Delta n = r(n+1) - r(n)$, la ecuación anterior se escribe ahora

$$p \times \Delta(n) = q \times \Delta(n-1),$$

de donde obtenemos la siguiente relación recursiva:

$$\Delta(n) = \frac{q}{p} \times \Delta(n-1) = \left(\frac{q}{p}\right)^2 \times \Delta(n-2) = \cdots = \left(\frac{q}{p}\right)^n \times \Delta(0),$$

y vemos que tenemos que determinar el valor de $\Delta(0)$. Para esto necesitamos determinar lo que se conoce como las *condiciones iniciales*. Observamos que si A comienza con capital 0, la probabilidad de ruina es 1: $r(0) = 1$, mientras que si el capital inicial de A es *m+n*, es decir, el capital inicial de B es 0, la probabilidad de ruina es 0: $r(m+n) = 0$. Vamos a usar estas dos ecuaciones para determinar la solución.
Observamos en primer lugar que $\Delta(0) = r(1) - r(0) = r(1) - 1.$ Por otro lado,

$$\Delta(0) + \Delta(1) + \cdots + \Delta(n-1) = r(1) - 1 + r(2) - r(1) + r(3) - r(2) + \cdots + r(n) - r(n-1)$$

Vemos que la suma de la derecha es una suma telescópica: todos los términos, menos el segundo y el penúltimo, aparecen dos veces y con signos diferentes, de modo que se cancelan. Despejando obtenemos

$$\begin{aligned} r(n) &= 1 + \Delta(0) + \Delta(1) + \cdots + \Delta(n-1) \\ &= 1 + \Delta(0) + \left(\frac{q}{p}\right)\Delta(0) + \cdots + \left(\frac{q}{p}\right)^{n-1}\Delta(0) \\ &= 1 + \Delta(0)\left[1 + \left(\frac{q}{p}\right) + \cdots + \left(\frac{q}{p}\right)^{n-1}\right]. \end{aligned}$$

Aun nos falta determinar $\Delta(0)$. Para esto usamos la segunda condición inicial y la ecuación anterior:

$$0 = r(n+m) = 1 + \Delta(0)\left[1 + \left(\frac{q}{p}\right) + \cdots + \left(\frac{q}{p}\right)^{n+m-1}\right]$$

$$\Delta(0) = -1 / \left[1 + \left(\frac{q}{p}\right) + \cdots + \left(\frac{q}{p}\right)^{n+m-1}\right]$$

y sustituyendo en la ecuación para *r(n)* obtenemos

$$r(n) = 1 - \frac{1 + \left(\frac{q}{p}\right) + \cdots + \left(\frac{q}{p}\right)^{n-1}}{1 + \left(\frac{q}{p}\right) + \cdots + \left(\frac{q}{p}\right)^{m+n-1}}.$$

Caso 1. $p = q = 0.5$, juego justo. En este caso $q/p = 1$ y

$$r(n) = 1 - \frac{n}{m+n} = \frac{m}{m+n}.$$

Vemos que en este caso la probabilidad de ruina es la proporción del capital total que tiene nuestro oponente. Quizás es más claro decir que la probabilidad de ganar (y que nuestro oponente se arruine) es la proporción del capital total que tenemos.

Caso 2. $p \neq q$. Alguno de los jugadores tiene la ventaja. Es el caso si jugamos algún juego de puro azar en un casino, que siempre tiene la ventaja. Para ver cuánto vale *r(n)* en este caso necesitamos la fórmula para la suma de una sucesión geométrica.
Llamemos $a = q/p$ y S_n a la suma de los primeros *n+1* términos de la sucesión:

$$S_n = 1 + a + a^2 + \cdots + a^n = 1 + a\left[1 + a + \cdots + a^{n-1}\right] = 1 + aS_{n-1}$$

y por otro lado sabemos que

$$S_n - S_{n-1} = a^n.$$

Combinando las dos ecuaciones tenemos que

$$1 + aS_{n-1} - S_{n-1} = a^n$$

de donde obtenemos que

$$S_{n-1} = \frac{1-a^n}{1-a}$$

Regresando a la expresión para *r(n)* tenemos

$$r(n) = 1 - \frac{\mathrm{S}_{\text{n-1}}}{S_{m+n-1}} = 1 - \frac{1-(q/p)^n}{1-(q/p)^{n+m}} = \frac{(q/p)^n - (q/p)^{n+m}}{1-(q/p)^{n+m}}.$$

Las siguientes tablas presentan la probabilidad de ruina como función del capital inicial para tres juegos, ruleta americana, ruleta europea y dados (craps).

p = 0.474		
n	n+m	r(n)
1	10	0.94
10	100	0.99995
100	1000	1
5	10	0.63
50	100	0.995
500	1000	1
9	10	0.153
90	100	0.647
900	1000	0.99997

p = 0.486		
n	n+m	r(n)
1	10	0.92
10	100	0.997
100	1000	1
5	10	0.569
50	100	0.942
500	1000	1
9	10	0.127
90	100	0.43
900	1000	0.996

p = 0.493		
n	n+m	r(n)
1	10	0.91
10	100	0.98
100	1000	1
5	10	0.535
50	100	0.8
500	1000	0.9999992
9	10	0.113
90	100	0.26
900	1000	0.939

¿Cuánto Apostar?

La sección anterior nos dice que si tenemos *n* unidades, nuestro oponente tiene *m* y jugamos una serie de juegos con probabilidad de ganar *p*, hasta que alguno de los dos se arruine, la probabilidad de ruina está dada por la fórmula anterior. ¿Qué sucede si cambiamos de unidad? Es decir, ¿si cambiamos el monto de la apuesta?

Vamos a llamar *unidad de apuesta* al monto que apostamos en cada juego. Este monto debe estar fijo a lo largo de la sucesión de juegos y lo vamos a denotar por *u*. En términos de esta unidad, nuestro capital inicial ahora es *n/u*, el capital total es *(n+m)/u* y la probabilidad de ruina es

$$r(n/u) = \frac{(q/p)^{n/u} - (q/p)^{(n+m)/u}}{1-(q/p)^{(n+m)/u}}.$$

Como ejemplo consideramos la siguiente situación. Tenemos 500 pesos y jugamos hasta ganar 1,000 o arruinarnos. La siguiente tabla muestra la probabilidad de ruina según la unidad de apuesta para las distintas probabilidades que hemos considerado.

p = 0.474	
u	r(n)
1	1
5	0.99997
10	0.995
100	0.627
500	0.526

p = 0.486	
u	r(n)
1	1
5	0.996
10	0.943
100	0.57
500	0.514

p = 0.493	
u	r(n)
1	0.9999992
5	0.943
10	0.8
100	0.535
500	0.507

Vemos que aumentar la apuesta disminuye nuestra probabilidad de ruina. Esto es consecuencia de que la expresión anterior es una función decreciente de *u*. En una situación como la que hemos descrito, en la cual estamos decididos a jugar hasta lograr nuestro objetivo o arruinarnos, una estrategia óptima es apostar en cada juego lo necesario para lograr nuestro objetivo, o si no tenemos suficiente para logarlo en un solo juego, apostar todo nuestro capital. Esta estrategia, conocida como de *juego arriesgado*, es siempre óptima.

Estrategias.
Vamos a considerar el siguiente juego. Yo tengo un juego de cartas (52) bien mezclado y voy volteando las cartas una a una. En cualquier momento que quieras tú puedes apostar que la próxima carta es roja. Si no apuestas nunca se toma que apostaste a la última carta en salir.
En promedio, como la mitad de las cartas son rojas, debes ganar la mitad de las veces, de modo que se trata de un juego justo si decides al azar cuando apostar. ¿Hay alguna estrategia que te permita hacer este juego favorable?

La respuesta es no, salvo que podamos ver el futuro (como en Flash Forward). Hay un famoso teorema con un nombre complicado (Teorema de Paro Opcional de Martingalas) que dice que ninguna estrategia basada en la información que tenemos del pasado puede hacer favorable un juego justo, o hacer justo un juego desfavorable. La demostración no es sencilla, pero en el caso del juego que hemos planteado hay una demostración simple.

Supongamos que hemos adoptado una cierta estrategia E para el juego, y la aplicamos al juego anterior modificado de la siguiente manera. De nuevo las cartas se van volteando una a una y de acuerdo a la estrategia E interrumpimos para apostar, pero ahora en lugar de apostar a la próxima carta, estamos apostando a la última. Está claro que en cualquier momento del juego, la probabilidad de que la próxima carta sea roja es la misma que la probabilidad de que la última carta sea roja, así que si la estrategia E funciona para la apuesta original también debería funcionar para esta versión modificada del juego. Pero si es así, la estrategia no puede funcionar porque ahora sólo se gana si la última carta es roja, y esto sucede con probabilidad 0.5.

Como quebrar la banca en Monte Carlo…
Joseph Jagger http://es.wikipedia.org/wiki/Joseph_Jagger
Grupo Eudaemons o Chaos Cabal http://www.roulette2002.com/es/estafas2.php
Edward Thorp http://es.wikipedia.org/wiki/Edward_O._Thorp
MIT Blackjack group http://lacomunidad.elpais.com/apuntes-cientificos-desde-el-mit/2008/3/21/los-millonarios-del-mit-blackjack-team
García Pelayo http://es.wikipedia.org/wiki/Gonzalo_Garc%C3%ADa-Pelayo

Referencias

Edward O. Thorp, *Beat the Dealer: A Winning Strategy for the Game of Twenty-One*, 1962 Vintage.

Edward O. Thorp & Sheen T. Kassouf, *Beat the Market: A Scientific Stock Market System*, 1967, Random House.

Edward O. Thorp. *The Mathematics of Gambling*. 1984, Lyle Stuart http://www.bjmath.com/bjmath/thorp/tog.htm

Edward Packel, *The Mathematics of Games and Gambling: 2nd Edition.* 2006, MAA

Richard A. Epstein, *The Theory of Gambling and Statistical Logic, 2nd Edition.* 2009, Academic Press.

Richard Isaac, *The Pleasures of Probability.* 1995 Springer

Ben Mezrich, *Breaking Vegas.* 2006 Arrow.

Ben Mezrich, *Bringing Down the House.* 2003 San Val.

Thomas Bass, *Eudaemonic Pie*. 1986 Vintage.

Iván y Gonzalo García-Pelayo, *La Fabulosa Historia de Los Pelayos.* 2003 Plaza y Janés.