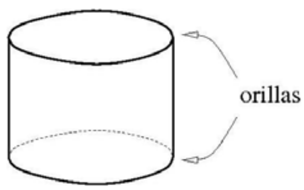
Un vistazo hacia la geometría moderna
("El zoológico topológico")

Gil Bor, CIMAT, Gto. *gil@cimat.mx*

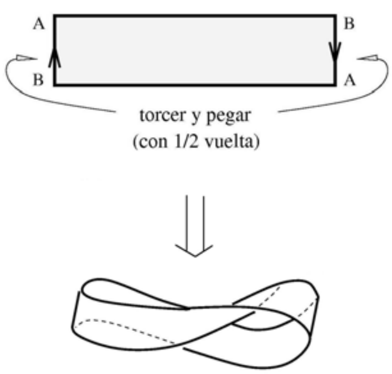
La **topología** es un área importante de la geometría moderna que estudia las propiedades de objetos geométricos que no cambien aun cuando se deforme el objeto (pero sin romperlo). Veremos aquí algunos ejemplos y dejamos otros como retos.

El **cilindro** es una superficie que tiene dos **caras** ("afuera" y "adentro") y dos **orillas** (el círculo superior, lo de la tapa, y el círculo inferior, lo de la base).



Pregunta: ¿existe una superficie con **una** cara y **una** orilla?

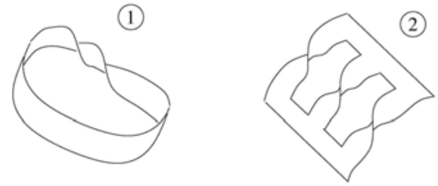
La respuesta es **sí**, y es la banda de Möbius:



Construye una banda de Möbius de papel, y examínala con cuidado para convencerte de que tiene solo una cara y solo una orilla. ("Una cara" quiere decir que puedes viajar continuamente de un lado del papel al otro, sin tener que cruzar una orilla; "una orilla" quiere decir que los puntos de la orilla forman solo una pieza [curva cerrada] y no digamos dos piezas, como en el caso del cilindro).

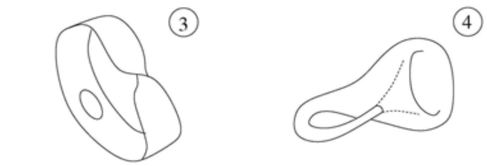
Podemos seguir de la misma manera: ¿existe una superficie con dos caras y una orilla? ¿Con una cara y dos orillas? ¡¿Con una cara y **ninguna** orilla?!

La respuesta a todas estas preguntas (y muchas mas) es "sí"; aquí están:



2 caras, 2 orillas
(enlazadas)

2 caras, 1 orilla
(anudada)



1 cara, 2 orillas
(sensillas, no enlazadas)

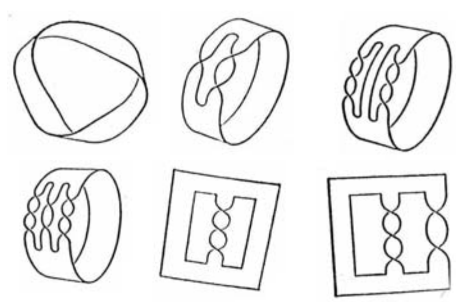
1 cara, ¡sin orillas!
(la "botella de Klein")

Estas propiedades (número de caras y orillas) son ejemplos de propiedades **topológicas**, propiedades de objetos geométricos que no cambian aun si deformamos a los objetos (pero sin romperlos).

De hecho, hay otra propiedad topológica interesante de estas superficies: en el cilindro, las dos orillas están separadas, mientras que uno puede preguntar si existe una superficie con digamos dos caras y dos orillas, tal que las dos orillas están **enlazadas** (o "enredadas").
El ejemplo (1) arriba es un ejemplo de tal superficie.

También puede pasar, cuando una superficie tiene una sola orilla, que esta orilla este **anudada** ("hecha un nudo"). Esto ocurre en el ejemplo (2) arriba.

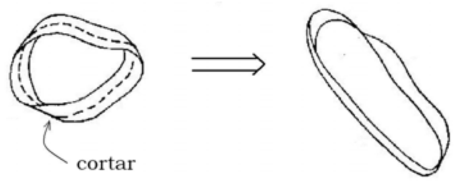
Ahora intente a decidir, para cada uno de los siguientes ejemplos, si las orillas están enredadas o no, y en caso de una sola orilla si forma un nudo.



Un "zoológico topológico"

Tomando una de estas superficies raras, hay otra cosa "irresistible" que uno pueda hacer: preparar un modelo de ellas en papel y cortarlas con tijeras. Para algunas de ellas obtenemos resultados bastante sorprendentes.

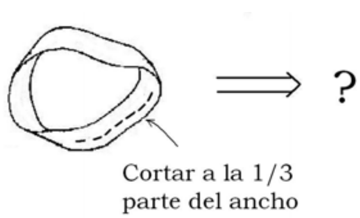
Por ejemplo: si cortas la banda de Möbius a lo largo de su "ecuador", obtienes una sola banda de doble de largo! (y no dos, como en el caso del cilindro).



… ¿y qué pasará si volvemos a cortar a la mitad esta nueva banda larga?

Te recomiendo intentarlo.

Luego, ¿qué pasa si cortamos la banda de Möbius, no a lo largo del "ecuador", sino a lo largo de una línea que está a una distancia de la orilla de un tercio de la anchura de la banda?

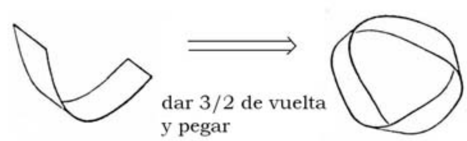


Armado con papel, tijeras, cinta adhesiva, curiosidad e imaginación, puedes así seguir explorando las propiedades topológicas de superficies. Si te gusta este tipo de actividad te sugiero consultar la página del "Rincón de Problemas" del Centro de Investigación en Matemáticas en Guanajuato: *http://www.cimat.mx/ciencia_para_jovenes/rincon/*.

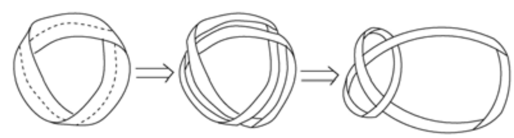
"Magia topológica"

Hay un "truco de magia" asociado con estos cortes que puedes hacer fácilmente. Lo puedes realizar en papel pero sale más impresionante si lo haces con tela.

Construye una banda de Möbius, pero antes de pegarla, en lugar de darle solamente media vuelta (como en la banda de Möbius "clásica" al principio de este artículo), le das **una vuelta y media**:



Si la construyes correctamente, y luego la cortas a lo largo de su ecuador, lo que se obtiene es una sola pieza, ¡pero con un nudo!



Luego, en lugar de dar 3/2 de vueltas antes de pegar, puedes intentar un número distinto de vueltas. ¡Inténtalo!