CIMAT, VI Escuela de verano, 25 de julio - 7 de agosto 1999
Introducción a la Geometría de la Mecánica Clásica

Problemas 6 - 8

6. Demostrar que $\mathrm{grad}(1/r) = \mathbf{x}/r^3$, donde $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ y $r = \|\mathbf{x}\| = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}$. En otras palabras, $-1/r$ es un potencial para el sistema de Kepler $\ddot{\mathbf{x}} = -\mathbf{x}/\|\mathbf{x}\|^3$.

7. Escribir la ecuación de Newton $\ddot{\mathbf{x}} = -\mathrm{grad}(V)$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$, en coordenadas polares (r, θ) en el plano, donde $V = V(r)$ es un potencial de fuerza central (e.g. $V = -1/r$ para el sistema de Kepler), usando el formalismo Lagrangiano.

Es decir, hay que escribir el Lagrangiano $L = T - V$ del sistema en coordenadas polares, y luego escribir las ecuaciones de Eueler-Lagrange

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}\right),$$

$i = 1, 2$, donde $x_1 = r$, $x_2 = \theta$.

8. Demuestra, usando el cálculo de variaciones, que las curvas mas cortas (mínima longitud) entre dos puntos dados en el plano son las lineas rectas, dadas por la ecuación $y = Ax + B$. Sugerencia: la longitud de la gráfica de una función $y = f(x)$, $x_0 \leq x \leq x_1$, está dada por $\int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + [f'(x)]^2}$.