Examen Parcial núm. 3 – Álgebra Lineal I
(28 de marzo, 2003)

1. Sean V y W dos espacios vectoriales sobre un campo F.

   (a) Define: $T : V \to W$ es una transformación lineal.

   (b) Define: $B \subset V$ es una base de V.

   (c) Demuestra: si $B \subset V$ es una base finita con n elementos, $B = \{e_1, \ldots, e_n\}$, y $w_1, \ldots, w_n$ son n elementos arbitrarios de W, entonces existe una única tranformación lineal $T : V \to W$ tal que $T(e_i) = w_i$, $i = 1, \ldots, n$.

2. Sea V un espacio vectorial sobre un campo F.

   (a) Define: V es de dimensión finita.

   (b) Demuestra: si V es un espacio vectorial de dimensión finita y $T : V \to V$ es una transformación lineal, entonces T es inyectiva si y solo si es suprayectiva.

   (c) Opcional (solo si te alcanza el tiempo): dar un ejemplo que muestra que el inciso anterior es falso si no suponemos que V tiene dimensión finita.

3. (a) Sea $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ una tranformación lineal cuya matriz, respecto a la base canónica $\{(1,0),(0,1)\}$, es

   $$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

   Encontrar la matriz de T con respecto a la base $\{(1,0),(1,1)\}$.

   (b) Opcional (solo si te alcanza el tiempo): encontrar la matriz de T^{2003} (T compuesta con su misma 2003 veces) con respecto a la base canónica de $\mathbb{R}^2$.