Algebra lineal 1, FAMAT, UG, 3 dic. del 2003.

Examen Final

Nota: *Todos los espacios vectoriales en este examen son de dimensión finita.*

1. Hay que responder "Cierto" o "Falso" a cada uno de los incisos abajo, y luego dar una explicación *breve* (1-2 frases, no se requiere demostración detallada).

   (a) Toda transformación lineal suprayectiva $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ es injectiva.

   (b) Sea $T : V \to W$ una transformación lineal suprayectiva. Entonces la transpuesta de T es injectiva.

   (c) Existe una única transformación lineal $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ que satisface $T(1, 0) = (0, 1)$, $T(1, 1) = (0, 7)$.

   (d) Un sistema arbitrario de ecuaciones lineales (homogeneo o no) con mas incognitas que ecuaciones siempre tiene una solución.

   (e) Si un sistema de ecuaciones lineales (homogeneo o no) tiene una solución, entonces esta solución es única.

   (f) Cada subconjunto infinito de un conjunto numerable es numerable.

   (g) El conjunto potencia de $\mathbb{N}$ (el conjunto de los números naturales) es numerable.

   (h) Sea W un subespacio vectorial de un espacio vectorial V sobre un campo F. Entonces existe otro subespacio $W' \subset V$ tal $W + W' = V$ y $W \cap W' = \{0\}$.

   (i) La intersección de dos subespacios vectoriales de un espacio vectorial es también un subespacio vectorial.

   (j) Existe una transformación lineal $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ cuyo kernel está generado por $\{(1, 0, 0), (1, 1, 0)\}$ y su imagen generado por $\{(0, 1, 1), (0, 0, 1)\}$.

2. Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la función dada por $T(x, y, z) = (y - z, z - x, x - y)$.

   (a) Demuestra que T es una transformación lineal.

   (b) Encuentra la matriz que representa a T con respecto a la base canónica de $\mathbb{R}^3$.

   (c) Demuestra que $B = \{(1, 1, 1), (1, -1, 0), (1, 0, -1)\}$ es una base de $\mathbb{R}^3$.

   (d) Encuentra la base dual a la base B del inciso anterior.

   (e) Encuentra la matriz de T con respecto a la base B.

   (f) Encuentra bases para el kernel y la imagen de T.

   (g) Encuentra una base para el anulador del kernel de T.

3. Sea $T : V \to W$ una transformación lineal. Demuestra que $dim(Ker(T)) + dim(Im(T)) = dim(V)$.