Algebra Lineal 1, agosto-diciembre, 2003.

Examen parcial núm. 2

19 nov. 2003

1. Sea V un espacio vectorial sobre un campo F.
   (a) Define: B es una base de V.
   (b) Demuestra: si B es una base de V entonces cada vector de V se puede expresar de manera única como una combinación lineal de elementos de B.

2. Sea V un espacio vectorial con una base $B = \{v_1, v_2, v_3\}$. Sea $B' = \{v_1', v_2', v_3'\}$, donde $v_1' = v_1$, $v_2' = v_1 + v_2$, $v_3' = v_1 + v_2 + v_3$.
   (a) Demuestra que B' es también una base de V.
   (b) Define: las coordenadas de un vector $v \in V$ con respecto a una base.
   (c) Expresa las coordenadas respecto a B' de un vector $v \in V$ en términos de sus coordenadas con respecto a la base B.
   (d) Expresa las coordenadas respecto a B de un vector $v \in V$ en términos de sus coordenadas con respecto a la base B'.

3. Sean V y W dos espacios vectoriales (sobre el mismo campo).
   (a) Define: $T : V \to W$ es una transformación lineal.
   (b) Sea $\{v_1, \ldots, v_n\} \subset V$ una base. Demuestra que para cada n vectores $w_1, \ldots, w_n \in W$ existe una única tranformación lineal $T : V \to W$ tal que $T(v_i) = w_i$, $i = 1, \ldots, n$.
   (c) Encuentra una transformacion lineal $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ tal que $T(0, 1, 1) = (1, 2)$, $T(1, 0, 1) = (2, 3)$, $T(1, 1, 0) = (3, 4)$. (Nota: "encontrar" significa dar una fórmula explícita para $T(x, y, z)$.)
   (d) Encuentra las dimensiones del kernel (el espacio nulo) y la imagen de la transformación lineal del inciso anterior.

4. Dar un ejemplo de una función $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ que es una transformación lineal real pero que no es lineal compleja.

5. Demuestra que dos espacios vectoriales de dimension finita (sobre el mismo campo) son isomorfos si y sólo si tienen la misma dimensión.

6. (Opcional) Demuestra que el espacio vectorial de todas las funciones continuas $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es de dimensión infinita sobre el campo $\mathbb{R}$.