Examen extra-ordinario

29 de junio, 2004

PARTE A *(60 puntos)*

Hay que responder a cada inciso con "Cierto" o "Falso". Después, en caso de "Falso", solo hay que dar un contraejemplo; en caso de "Cierto" hay que dar una explicación **breve** *(por ejemplo, mencionar un resultado visto en el curso que implica el inciso).*

NOTAS:
1. Todos los espacios vectoriales son de dimensión finita.
2. $\mathbb{R}^n$ *y* $\mathbb{C}^n$ *que aparecen en los incisos están considrerados con su estructura euclidieana y hermitiana (resp.) canónica.*

1. Todo operador lineal T en $\mathbb{R}^2$ con $\det(T) = 1$ es una isometría.

2. Todo operador lineal diagonalizable en $\mathbb{R}^2$ es autoadjunto.

3. $8x^2 + 22xy + 15y^2 \geq 0$ para todo $x, y \in \mathbb{R}$.

4. Un espacio euclideano V está generado por un subconjunto $C \subset V$ si para todo $v \in V$, $(v, w) = 0$ para todo $w \in C$ implica $v = 0$.

5. Si dos matrices $A, B \in Mat_{2\times 2}(\mathbb{C})$ tienen los mismos valores propios entonces A, B son semejantes.

6. Si el polinimio característico de un operador lineal es x^7 entonces el operador es nilpotente.

7. Todo operador lineal en $\mathbb{R}^3$ admite un subespacio vectorial 2-dimensional invariante. (Sugerencia: considerar el operador adjunto).

8. Si T es un operador lineal en $\mathbb{C}^n$ entonces T y T^* tienen el mismo número de valores propios.

9. Toda permutación de 8 objetos es una composición de 8 transposiciones.

10. Sea $T : V \to V$ un operador lineal invertible y $W \subset V$ un subespacio invariante. Entonces el operador inducido en V/W es también invertible.

PARTE B *(20 puntos)*

Sea $T : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ el operador dado por $T(x, y) = (x+iy, y-ix)$. Encuentra una matriz unitaria U tal que UAU^{-1} es diagonal, donde A es la matriz de T con respecto a la base canónica de $\mathbb{C}^2$.

PARTE C *(20 puntos)*

Sea $\{v_1, \dots, v_k\}$ un conjunto ortonormal en un espacio euclideano V (no necesariamente una base). Demuestra que para todo $v \in V$, $\sum_{i=1}^{k} |(v, v_i)|^2 \leq \|v\|^2$, con igualdad ssi v pertenece al subespacio generado por $\{v_1, \dots, v_k\}$.