Examen extra-ordinario - soluciones

PARTE A *(60 puntos)*

Hay que responder a cada inciso con "Cierto" o "Falso". Después, en caso de "Falso", solo hay que dar un contraejemplo; en caso de "Cierto" hay que dar una explicación **breve** *(por ejemplo, mencionar un resultado visto en el curso que implica el inciso).*

NOTAS:
1. Todos los espacios vectoriales son de dimensión finita.
2. $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{C}^n$ que aparecen en los incisos están considrerados con su estructura euclidieana y hermitiana (resp.) canónica.

1. Todo operador lineal T en $\mathbb{R}^2$ con $\det(T) = 1$ es una isometría.

$\triangleright$ Falso. Por ejemplo, $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

NOTA: el converso es cierto.

2. Todo operador lineal diagonalizable en $\mathbb{R}^2$ es autoadjunto.

$\triangleright$ Falso. $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ es diagonalizable (tiene dos valores propios distintos) pero no es autoadjunto (la matriz no es simetrica).

NOTA: el converso es cierto.

3. $8x^2 + 22xy + 15y^2 \geq 0$ para todo $x, y \in \mathbb{R}$.

$\triangleright$ Falso. La expresión $q(x, y) = 8x^2 + 22xy + 15y^2$ es una forma cuadrática dada por la matriz $\begin{pmatrix} 8 & 11 \\ 11 & 15 \end{pmatrix}$, cuya determinante es $8 \cdot 15 - 11^2 = -1 < 0$. Esto implica que existe un cambio de coordenadas (invertible) $(x, y) \mapsto (X, Y)$, en la cual se tiene $q(X, Y) = X^2 - Y^2$, así que $X = 0$, $Y = 1 \implies q < 0$.

NOTAS: 1. Hay un argumento mas elemental. Para $x \neq 0$, denotamos $z = y/x$, así que $q(x, y) = y^2(8z^2 + 22z + 15)$. El polinomio cuadrático $p(z) = 8z^2 + 22z + 15$ tiene descriminante $22^2 - 4 \cdot 8 \cdot 15 > 0$, por lo que tiene dos raices distintos $z_1 < z_2$, así que $z \in (z_1, z_2) \implies p < 0 \implies q < 0$.
2. Con poco trabajo se puede encontrar un contra ejemplo: $x = 4, y = -3$.

4. Un espacio euclideano V está generado por un subconjunto $C \subset V$ si para todo $v \in V$, $(v, w) = 0$ para todo $w \in C$ implica $v = 0$.

$\triangleright$ Cierto. Sea W es subespacio generado por C. Basta demostrar que $W^\perp = \{0\}$. Si $v \in W^\perp \implies (v, w) = 0$ para todo $w \in W$, e in particular para todo $w \in C$ (ya que $C \subset W$), por lo que $v = 0$.

5. Si dos matrices $A, B \in Mat_{2\times 2}(\mathbb{C})$ tienen los mismos valores propios entonces A, B son semejantes.

$\triangleright$ Falso. $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ tienen los mismos valores propios, 1, pero no son semejantes (la primera no es diagonalizable ya que el espacio propio del valor $\lambda = 1$ tiene dimensión 1).

6. Si el polinimio característico de un operador lineal es x^7 entonces el operador es nilpotente.

$\triangleright$ Cierto. Si T es el operador entonces según el teorema de Cayley-Hamilton $T^7 = 0$.

7. Todo operador lineal en $\mathbb{R}^3$ admite un subespacio vectorial 2-dimensional invariante.
(Sugerencia: considerar el operador adjunto).

$\triangleright$ Cierto. Si T es un operador lineal en $\mathbb{R}^3$ entonces su adjunta T^* admite un subespacio invariante de dimensión 1, generado por un vector propio (ya que su polinomio característico tiene un grado impar, 3). El complemento ortogonal es T-invariante y de dimensión 2.

8. Si T es un operador lineal en $\mathbb{C}^n$ entonces T y T^* tienen el mismo número de valores propios.

$\triangleright$ Cierto. λ es un valor propio de T ssi $\bar{\lambda}$ es un valor propio de T^*. Demostración: sea A la matriz de T en una base ortonormal, entonces $(\bar{A})^t$ es la matriz de T^*. Así que el polinomio característico de T^* satisface

$p_{T^*}(\bar\lambda) = \det(\bar\lambda I - (\bar A)^t) = \det(\left(\overline{\lambda I - A}\right)^t) = \det(\overline{\lambda I - A}) = \overline{\det(\lambda I - A)} = \overline{p_T(\lambda)} \implies \lambda$ es una raíz de p_T ssi $\bar\lambda$ es una raíz de p_{T^*}.

9. Toda permutación de 8 objetos es una composición de 8 transposiciones.

$\triangleright$ Falso. Una composición de número par de permutaciones impares es par.

10. Sea $T : V \to V$ un operador lineal invertible y $W \subset V$ un subespacio invariante. Entonces el operador inducido en V/W es también invertible.

$\triangleright$ Cierto. Si T es invertible y W es T-invariante entonces $T(W) = W$, por lo que W es T^{-1}-invariante. Ahora se verifeque que el operador inducido por T^{-1} en V/W es la inversa del operador inducido por T en V/W.

NOTA: otra demostración es usando la fórmula (demostrada en clase), $\det(T) = \det(T_W)\det(T_{V/W})$, así que $\det(T) \neq 0 \implies \det(T_{V/W}) \neq 0$. La demostración anterior tiene la ventaja que es válida tambien en espacios vectoriales de dimensión infinita.

PARTE B *(20 puntos)*

Sea $T : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ el operador dado por $T(x, y) = (x + iy, y - ix)$. Encuentra una matriz unitaria U tal que UAU^{-1} es diagonal, donde A es la matriz de T con respecto a la base canónica de $\mathbb{C}^2$.

$\triangleright$ Es muy similar a la parte B del examen final. Los valores propios son $\lambda = 0, 2$. Vectores propios (normalizados) correspondientes son $(1, i)/\sqrt{2}$, $(1, -i)/\sqrt{2}$. La matriz U es la inversa de $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix}/\sqrt{2}$. Pero esta última es unitaria, así que basta tomar su transpuesta conjugada $\implies U = \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{pmatrix}/\sqrt{2}$.

PARTE C *(20 puntos)*

Sea $\{v_1, \ldots, v_k\}$ un conjunto ortonormal en un espacio euclideano V (no necesariamente una base). Demuestra que para todo $v \in V$, $\sum_{i=1}^k |(v, v_i)|^2 \leq \|v\|^2$, con igualdad ssi v pertenece al subespacio generado por $\{v_1, \ldots, v_k\}$.

$\triangleright$ Completamos $\{v_1, \ldots, v_k\}$ a una base ortonormal de V $\{v_1, \ldots, v_k, \ldots, v_n\}$ (proceso de Gram-Schmidt). Si $v \in V$ entonces $v = \sum_{i=1}^n c_i v_i$ para unos escalaras $c_1, \ldots, c_n \implies \|v\|^2 = (v, v) = (\sum_{i=1}^n c_i v_i, \sum_{j=1}^n c_j v_j) = \sum_{i,j=1}^n c_i c_j (v_i, v_j) = \sum_{i,j=1}^n c_i c_j \delta_{ij} = \sum_{i=1}^n (c_i)^2$. Por otro lado, para todo $j = 1, \ldots, n$, $(v, v_j) = (\sum_{i=1}^n c_i v_i, v_j) = \sum_{i=1}^n c_i (v_i, v_j) = \sum_{i=1}^n c_j \delta_{ij} = c_j \implies \|v\|^2 = \sum_{i=1}^n (v, v_i)^2 \geq \sum_{i=1}^k (v, v_i)^2$, con igualdad ssi $\sum_{i=k+1}^n (v, v_i)^2 = 0$, ssi $(v, v_{k+1}) = \ldots = (v, v_n) = 0$, ssi $v = \sum_{i=1}^k c_i v_i$, ssi v pertenece al subespacio generado por $\{v_1, \ldots, v_k\}$.