Examen final

8 de junio, 2004

PARTE A *(60 puntos)*

Hay que respondr a cada inciso con "Cierto" o "Falso". Después, en caso de "Falso", solo hay que dar un contraejemplo; en caso de "Cierto" hay que dar una explicación **breve** *(por ejemplo, mencionar un resultado visto en el curso que implica el inciso).*

NOTA: los espacios vectoriales $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{C}^n$ que aparecen en los incisos están considrerados con su estructura euclidieana y hermitiana (resp.) canónica.

1. Un operador lineal en $\mathbb{C}^3$ con polinomio característico $x(x^2+1)$ es diagonalizable.

2. Todo operador normal en $\mathbb{C}^3$ es hermitiano.

3. El operador $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ dado por $T(x,y)=(x+y,x-y)/\sqrt{2}$ es una isometría.

4. Existe una producto interno único en $\mathbb{R}^3$ tal que $\{(1,2,3),(4,5,6),(7,8,9)\}$ es una base ortonormal.

5. Las matrices $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 5\\ 0 & 2 & 6\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 1 & 7 & 8\\ 0 & 2 & 9\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix}$ son semejantes.

6. Existe un operador normal en $\mathbb{C}^2$, cuya matriz, con respecto a una cierta base en $\mathbb{C}^2$, es $\begin{pmatrix} 1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

7. El conjunto de puntos $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ que satisface $12x^2+13xy+14y^2=x+15$ es una hipérbola.

8. Matrices semjantes tienen los mismos valores propios.

9. (Opcional) Existe un operador $T:\mathbb{C}^2\to\mathbb{C}^2$ que satisface $T(1,2)=(3i,4i)$, $T^*(5,6)=(7i,8i)$. (Sugerencia: considera $(T^*(5,6),(1,2))$.)

10. Si el rango de un operador T en $\mathbb{R}^7$ es 3, entonces la nulidad de T^* es 4.

11. La proyección ortogonal sobre un subespacio de un esapcio euclideano es un operador autoadjunto.

12. Un conjunto ortogonal de 7 vectores no nulos en $\mathbb{R}^7$ es una base.

13. La suma directa de dos operadores invertibles es invertible.

14. El producto de dos permutaciones impares es una permutación impar.

15. Los valores propios de un operador autoadjunto en $\mathbb{C}^n$ son reales.

PARTE B *(40 puntos)*

Sea $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ el operador lineal dado por $T(x,y,z)=(y-z,x+z,y-x)$.

1. Demuestra que T es invertible y encuentra su inversa.

2. Demuestra que T es autoadjunto.

3. Encuentra el polinomio característico de T y sus valores propios.

4. Sea A la matriz de P con respecto a la base canónica. Encuentra una matriz ortogonal P tal que PAP^{-1} es diagonal.

5. Encuentra el polinomio mínimo de T.