Algebra Lineal 2, FAMAT-UG, ene-jun, 2004

Examen Parcial núm. 1

4 de marzo, 2004

Parte A (75 puntos, 5 puntos cada inciso)

Responder a cada inciso primero con "cierto" o "falso", seguido por una explicación breve (no se requiere una demostracíon completa).

NOTA: todos los espacios vectoriales en esta parte son de dimensión finita.

1. Si A es una matriz cuadrada tal que $det(A) = 0$ entonces A no es invertible.

2. Si A, B son dos matrices $n \times n$ entonces $det(A + B) = det(A) + det(B)$.

3. Cada transposición es una permutación impar.

4. Sea A una matriz cuadrada con coeficientes enteros (en $\mathbb{Z}$) tal que $det(A) = 1$. Entonces A es invertible y su inversa tambien tiene coeficientes enteros.

5. Un sistema de n ecuaciones lineales con n incognitas $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i$, $i = 1, \ldots, n$, tiene una solución única si y solo si la matriz de coeficientes $A = (a_{ij})$ satisface $det(A) \neq 0$.

6. Sea $T : V \to V$ una transformación lineal y $v_1, v_2 \in V$ dos vectores propios de T que pertenecen a distintos valores propios. Entonces $\{v_1, v_2\}$ es linealmente independiente.

7. Sea $T : V \to V$ una transformación lineal y $v_1, v_2 \in V$ dos vectores propios de T que pertenecen al mismo valor propio. Entonces $\{v_1, v_2\}$ es linealmente dependiente.

8. Si T es un operador lineal invertible diagonalizable entonces T^{-1} es tambien diagonaizable.

9. Una transformación lineal $T : V \to V$ es invertible si y solo si 0 no es un valor propio de T.

10. Todo operador lineal (en un espacio vectorial de dimensión finita) tiene un espectro finito. (Nota: el espectro de un operador es el conjunto de sus valores propios).

11. Existe una transformación lineal $T : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^5$ sin valores propios.

12. Sea $T : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ una transformación lineal cuya matriz, con respecto a la base canónica, tiene coeficientes reales. Si $\lambda \in \mathbb{C}$ es un valor propio de T entonces $\bar{\lambda}$ es tambien un valor propio.

13. Existen dos permutaciones $\sigma_1, \sigma_2 \in S_4$ tal que $\sigma_1\sigma_2 \neq \sigma_2\sigma_1$.

14. Todo operador lineal diagonalizable es invertible.

15. Si un operador lineal T en un espacio vectorial de dimensión n tiene n valores propios distintos entonces el detrminante de T es el producto de sus valores propios.

Parte B (25 puntos)
Sea $T : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ el operador definido por $T(z_1, z_2, z_3) = (z_2, z_3, z_1)$. Encunetra los valores propios de T y los espacios propios asociados.