Examen Parcial núm. 2

20 de abril, 2004

Parte A (70 puntos, 7 puntos cada inciso)

Responder a cada inciso primero con "cierto" o "falso", seguido por una explicación breve (no se requiere una demostracíon completa).

NOTA: todos los espacios vectoriales en esta parte son de dimensión finita.

1. Toda isometría $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ (con el producto interior canónico) satisface $\det(T) = 1$.

2. Si v_1, v_2 son dos vectores en un espacio euclideano V tal que $(v_1, w) = (v_2, w)$ para todo $w \in V$ entonces $v_1 = v_2$.

3. Sea V un espacio euclideano y $p : V \to V$ la proyección ortogonal sobre un subespacio $W \subset V$. Entonces $\|p(v)\| \leq \|v\|$ para todo $v \in V$ con igualdad ssi $v \in W$.

4. Sea V un espacio euclideano y $T : V \to V$ un operador autoadjunto. Entonces T tiene un vector propio.

5. La suma de dos operadores autoadjuntos es un operador autoadjunto.

6. Dados dos vectores no nulos $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^2$, existe en $\mathbb{R}^2$ un producto interno tal que $v_1 \perp v_2$.

7. Para todo subespacio W de un espacio euclideano V, $(W^\perp)^\perp = W$.

8. La inversa de un operador lineal autoadjunto invertible es tambien un operador autoadjunto.

9. Existe una matriz 2×2 con entradas reales A tal que $A^{2003} = \begin{pmatrix} 2001 & 2002 \\ 2002 & 2003 \end{pmatrix}$.

10. Si T es un operdaor autoadjunto en un espacio euclideano V entonces V es la suma directa del kernel y la imagen de T.

Parte B (30 puntos)

Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ el operador definido por $T(x_1, x_2, x_3) := (x_1 + 2x_2 + 3x_3)(1, 2, 3)$. Encontrar una matriz diagonal D y una base ortonormal B de $\mathbb{R}^3$ (con el producto interno canónico) tal que $[T]_B = D$ (la matriz de T con respecto a B es D).