Algebra Lineal 2, Facultad de Matemáticas de la UG, ene. – jun. 2004.

Tarea num. 14

(Por entregar el viernes, 21 de mayo, 2004.)

1. Encontrar un criterio en término de las 6 coeficientes de la ecuación de una sección cónica, que te permite decidir si la sección es parábola, hipérbola, elipse o algunos de los casos degenerados. Sugerencia: considerar la determinante de la matriz Q que representa la parte cuadrática.

2. Hay que dibujar cada una de las siguientes secciones cónicas. En caso de elipse o hipérbola hay que encontrar sus focos y las ecuaciones para sus ejes se simetría. En caso de hipérbola también las ecuaciones para las asíntotas y en caso de parábola el foco, la ecuación de la directriz y el vertice (por ejemplo, para $y = x^2$ el vertice es el origen $(0, 0)$).
   (a) $y^2 - 12x + 2y + 25 = 0$.
   (b) $4xy - 3y^2 = 8$.
   (c) $8x^2 - 4xy + 5y^2 = 36$
   (d) $5x^2 - 4xy + 8y^2 + 4\sqrt{5}x - 16\sqrt{5}y + 4 = 0$
   (e) $77x^2 + 78xy - 27y^2 + 70x - 30y + 29 = 0$.
   (f) $x^2 + 4xy + 4y^2 - x - 2y - 2 = 0$.

3. Demostrar:
   (a) si E, E' son dos elipses en el plano tal que tienen la misma distancia entre sus focos y misma suma de distancias a sus focos, entonces son congruentes.
   (b) si H, H' son dos hipérbolas en el plano tal que tienen la misma distancia entre sus focos, y mismo ángulo entre sus asíntotas, entonces son congruentes.
   (c) Opcional: demostrar el converso de los últimos dos incisos.

4. Opcional: sean P, P' dos parábola con focos F,F' y directrices l, l' (resp.). Demostrar que si K es una congruencia entre P y P', o sea $K(P) = P'$, entonces $K(F) = F'$, $K(l) = l'$.

5. Opcional: Sea S un operador lineal autoadjunto en $\mathbb{R}^2$. Demuestra que todas las secciones cónicas dadas por $(v, Qv) = 1$, donde $Q = (S - aI)^{-1}$ (para aquellos $a \in \mathbb{R}$ tal que la inversa existe), tienen los mismos focos.

   Nota: una familia de cónicas con esta propiedad se llama una familia confocal. Las familias confocales de cónicas tienen propiedades muy interesantes. Por ejemplo: cada elipse e hipérbola de una familia confocal se interesectan ortogonalmente (en 4 puntos). Teorema: toda familia confocal es congruente a una familia de este problema.