Algebra Lineal 2, Facultad de Matemáticas de la UG, ene.- jun. 2004.

Tarea num. 3 – Soluciones

1. Demuestra que S_n tiene $n!$ elementos.

   Demostración: Por inducción sobre n. Para $n = 1$, $S_1 = \{1\} \Longrightarrow \#S_1 = 1$. Para $n > 1$, definimos $S_n^k := \{\sigma \in S_n \mid \sigma(n) = k\}$, $k = 1, \ldots, n$. Demostramos que $S_n^k \sim S_{n-1}$, $k = 1, \ldots, n$. Para $k = n$, es obvio (se extiende una permutación $\eta \in S_{n-1}$ al definir $n \mapsto n$). Para $k < n$, fijamos una permutación α tal que $\alpha(k) = n$ (puede ser por ejemplo la transposición que intercambia n con k). Entonces $\sigma \mapsto \alpha\sigma$ define una biyección $S_n^k \to S_n^n$ (la inversa está dada por $\sigma \mapsto \alpha^{-1}\sigma$). Tenemos entonces que $\#S_n^k = \#S_n^n = \#S_{n-1} = (n-1)!$ (por inducción) por todo $k = 1, \ldots, n$, así que $\#S_n = \sum_k \#S_n^k = n(n-1)! = n!$. $\square$

2. (Opcional) Demuestra que $m(\sigma)$ se puede calcular de la manera siguiente: si en la matriz $2 \times n$ que representa a σ uno conecta, con n segmentos lineales, cada número de la primera fila con el mismo número en la segunda fila, entonces $m(\sigma)$ es el número de puntos de intersecciones, i.e. el número de pares de segmentos que se intersectan (si es necesario, movemos los segmentos un poco para evitar puntos en donde intersectan mas que dos segmentos.)

   Demostración: Denotamos por $A_1, A_2 \ldots, A_n$ y $B_1, B_2, \ldots, B_n$ las entradas de la primera y segunda fila (resp.) en la matriz que representa a σ; o sea, $A_i = i$, $B_i = \sigma(i)$, $i = 1, \ldots, n$. Cada punto de intersección en la matriz corresponde a la intersección de un par de segmentos, $\overline{A_i B_{i^*}}$ y $\overline{A_j B_{j^*}}$, con $i < j$ y $i^* > j^*$. Pero $i = B_{i^*} = \sigma(i^*)$, $j = B_{j^*} = \sigma(j^*)$, así que $j^* < i^*$ y $\sigma(j^*) > \sigma(i^*)$. De este modo obtenemos una biyección entre los puntos de intersección en el dibujo y el conjunto de pares de indeces (j^*, i^*) que σ invierte su orden.

3. Demuestra que una transposición es una permutación impar.

   Demostración: Sea $1 \le i < j \le n$ y sea τ la ransposición que intercambia i con j. Sea (i^*, j^*), $i^* < j^*$, un par de indices que τ invierte su orden . Hay dos opciones: (1) $i = i^* < j^* \le j$, y (2) $i < i^* < j^* = j$. De la primera opción son $j - i$ pares, de la segunda son $j - i - 1$. En total son $m(\tau) = 2(j-i) - 1$, un número impar.

4. (a) Demuestra que cada permutación (distinta de la identidad) se puede escribir como un producto (composición) de transposiciones.

   Demostración: Sea $\sigma \in S_n$. Si $\sigma \neq 1$ entonces existe un primer k en $\{1, \ldots, n\}$ tal que $\sigma(k) \neq k$. O sea $\sigma(i) = i$ para $i = 1, 2, \ldots, k-1$ y $\sigma(k) > k$. Sea τ_1 la transposición que intercambia k con $\sigma(k)$. Entonces $\tau_1\sigma(i) = i$ para todo $i = 1, \ldots, k$. Si $\tau_1\sigma = 1 \Longrightarrow \sigma = \tau_1$ y acabamos, de otro modo repetimos el proceso con $\sigma_1 := \tau_1\sigma$, $\sigma_2 := \tau_2\sigma_1$, $\sigma_3 := \tau_3\sigma_2$, $\ldots$ hasta obtener $1 = \tau_m\sigma_{m-1} = \tau_m \cdots \tau_1\sigma = 1$, o sea $\sigma = \tau_1\tau_2\cdots\tau_m$.

   (b) Expresa la permutación
   $$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in S_5$$
   como un producto de tranposiciones.

   Respuesta: Denotamos por (ij) la tranposición que intercambia i con j. Seguimos la receta en la demostración del inciso anterior: $\sigma(1) = 2 \Longrightarrow \tau_1 := (12)$, $(12)\sigma(2) = 3 \Longrightarrow \tau_2 := (23)$, $(23)(12)\sigma(3) = 4 \Longrightarrow \tau_3 := (34)$, $(34)(23)(12)\sigma(4) = 5 \Longrightarrow \tau_5 := (45)$ y tenemos $\sigma = (12)(23)(34)(45)$.