Algebra Lineal 2, Facultad de Matemáticas de la UG, ene. – jun. 2004.

Tarea num. 4

(Por entregar el viernes, 20 de feb., 2004.)

Definición: Sea $A = (a_{ij})$ una matriz $n \times n$. La determinante de A se define por

$$det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} signo(\sigma)\ a_{\sigma(1)1} a_{\sigma(2)2} \cdots a_{\sigma(n)n}.$$

Resultados demostrados en clase:

1. Para un espacio vectorial de dimensión n, $\dim \Lambda^n(V^*) = 1$. Explicitamente, si fijamos una base $e_1, \ldots, e_n$, entonces cada función n-lineal alternada en V es de la forma $f(v_1, \ldots, v_n) = det(A) f(e_1, \ldots, e_n)$, donde la matriz $A = (a_{ij})$ está dada por $v_j = \sum_{i=1}^n a_{ij} e_i$, $j = 1, \ldots, n$.
2. $det(AB) = det(A) det(B)$.
3. $det(A) \neq 0$ si y solo si A es invertible.

Problemas

1. (a) Sea $A = (a_{ij})$ una matriz $n \times n$ y $\sigma \in S_n$. Demuestra que

$$a_{\sigma(1)1} a_{\sigma(2)2} \cdots a_{\sigma(n)n} = a_{1\sigma^{-1}(1)} a_{2\sigma^{-1}(2)} \cdots a_{n\sigma^{-1}(n)}.$$

   (b) Usando el inciso anterior, demuestra que $det(A^t) = det(A)$.

   (c) Demuestra, directamente de la fórmula que define a $det(A)$ (arriba en “definición”), que $det(A)$ es multilineal y alternada en las *filas* de A.

   (d) Usando el inciso anterior, demuestra que $det(A^t) = det(A)$.

2. Sea $A = (a_{ij})$ una matriz $n \times n$ con coeficientes en un acampo F. Denota por $D_{ij}(A)$ la determinante de la matriz que se obtiene de A al eliminar en ella la fila i y la columna j.

   (a) Demuestra que para todo $i = 1, \ldots, n$, $det(A) = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} D_{ij}(A)$ (“el desarrollo de $det(A)$ según la fila i”), y que para todo $j = 1, \ldots, n$, $det(A) = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} D_{ij}$ (“el desarrollo según la columna j”).

   Nota: $(-1)^{i+j} D_{ij}(A)$ se llama el *cofactor* ij de A.

   Sugerencia: para el desarrollo en la primera fila ($i = 1$), demuestra que la expresión dada es una función n-lineal alternada en las columnas de A. Para el desarrollo en fila i general, puedes usar el hecho que $det(A)$ es alternada en filas para reducir al caso de $i = 1$. Para el desarrollo en columnas puedes usar $det(A^t) = det(A)$.

   (b) Define la *matriz adjunta* de A por $adj(A)_{ij} := (-1)^{i+j} D_{ji}(A)$ (la transpuesta de la matriz de cofactores de A). Demuestra que $A\ adj(A) = det(A) I$.

3. Del libro: pág. 154: 7; pág. 161: 1, 3, 4, 5.

   Sugerencia para el problema 1 de la pág. 154: A es invertible ssi $det(A) \neq 0$; la inversa está dada por $adj(A)/det(A)$.

4. Sea $T : V \to V$ una transformación lineal en un espacio vectorial de dimensión n sobre un campo F. En este ejercisio vemos como definir la detrminante de T.

   (a) Demuestra que existe una única constante $c \in F$ tal que para toda función $f \in \Lambda^n(V^*)$,
   $$f(Tv_1, \ldots, Tv_n) = cf(v_1, \ldots, v_n),$$
   para todo $v_1, \ldots, v_n \in V$.

   (b) Demuestra que la constante c del inciso anterior satisface $c = det(A)$, donde A es la matriz de T con respecto a una base de V.

   (c) Concluye del inciso anterior que la determinante de la matriz de una transformación lineal en un espacio vectorial no depende de la base del espacio vectorial usada para encontrar la matriz (aunque la matriz misma típicamente sí depende de la base.)

   (d) Demuestra el inciso anterior usando la fórmula para cambio de matriz, $A \mapsto FAF^{-1}$, donde F es la matriz de cambio de base.

   Definición: $det(T) := det(A)$, donde A es la matriz de T con respecto a una base de V (cualquera).

5. (Opcional) Para cada permutación $\sigma \in S_n$ definimos $T_\sigma : F^n \to F^n$ por
   $$T_\sigma(x_1, \ldots, x_n) := (x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \ldots, x_{\sigma(n)}).$$

   (a) Demuestra que T_σ es una transformación lineal y encuentra su matriz con respecto a la base canónica.

   (b) Encuentra una relación entre T_{σ_1}, T_{σ_2} y $T_{\sigma_1\sigma_2}$.

   (c) Encuentra $det(T_\sigma)$.