Exámen Final

6 dic, 2005

Duración: 2 horas.

Hay que resolver 4 de los siguientes 5 problemas (25 pts cada problema).

1. *a*) (5 pts) Define: $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es continua en $x \in \mathbb{R}^n$.
   b) (5 pts) Define: $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es diferenciable en $x \in \mathbb{R}^n$.
   c) (15 pts) Demuestra: la función $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \|x\| = \sqrt{\sum x_i^2}$ es continua en todo $\mathbb{R}^n$, diferenciable en todo $\mathbb{R}^n \setminus \mathbf{0}$ y no es diferenciable en $\mathbf{0}$.

2. (25 pts) Encontrar el máximo y mínimo valor de la función $z = xy$ sobre la elipse $x^2/4 + y^2 = 1$.

3. (25 pts) Encontrar la ecuación del plano tangente al elipsoide $x^2/3 + y^2/12 + z^2/27 = 1$ en el punto $(1, 2, 3)$.

4. Consideremos la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por $f(x, y) = (x^2 - y^2, 2xy)$.
   a) (10 pts) Demuestra que f es invertible en una vecindad de $(x, y) = (1, 1)$. O sea, existen abiertos U, V en $\mathbb{R}^2$ tal que $(1, 1) \in U$ y f define una biyección de U con V con una inversa diferenciable.

   Nota: se puede usar el teorema de función inversa sin demostrarlo, pero hay que anunciarlo con precisión y confirmar que las condiciones en este teorema se cumplen.

   b) (15 pts) Sea g la inversa (local) de f indicada en el inciso anterior. Encuentra la matrix Jacobiana de g en $f(1, 1)$.

5. (25 pts) Sea $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ una función continuamente diferenciable y $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$ tal que $F_z(x_0, y_0, z_0) \neq 0$. Demuestra que existe una vecindad U de (x_0, y_0) en $\mathbb{R}^2$, un intervalo abierto $I \subset \mathbb{R}$ alrededor de z_0 y una función continuamente diferenciable $f : U \to I$ tal que para todo $(x, y) \in U$, $z = f(x, y)$ es el único punto $z \in I$ tal que $F(x, y, z) = F(x_0, y_0, z_0)$.