Ejercicios de preparación al exámen parcial 1 (repetido)

Instruciones: hay que leer con cuidado cada uno de los incisos y decidir si es cierto o falso. En caso de "Cierto" hay que dar una explicación breve que capta el punto esencial; en caso de "Falso" hay que dar un contraejemplo. Típicamente para un inciso falso hay muchos contra-ejemplos y hay que hacer un esfuerzo de encontrar un contra-ejemplo lo más simple posible. La gran mayoría de los incisos no requieren cuentas complicadas, solo entender los conceptos del curso. Al final se encuentra la lista de los incisos ciertos. ¡Intente aguantar la tentación de mirar las respuestas antes de pensar en los incisos! Algunos de los incisos no son tan fáciles. De hecho, hay un inciso que no puedo hacer. Reto: ¿Cuál es?

Los incisos:

1. Todo subconjunto de $\mathbb{R}^2$ está contenido en un conjunto abierto.
2. Todo subconjunto no vacío de $\mathbb{R}^2$ contiene un subconjunto abierto no vacío.
3. La intersección de cualquer familia de abiertos en $\mathbb{R}^2$ es un abierto.
4. Existe una función diferenciable $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que $f(1,2) = 3$, $f_x(1,2) = 4$ y $f_y(1,2) = 5$.
5. Existe una función diferenciable dos veces $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que $f(0,0) = 1$, $f_x(0,0) = 2$, $f_y(0,0) = 3$, $f_{xx}(0,0) + f_{yy}(0,0) = 0$ y f no es un polinomio en dos variables.
6. No existe una función diferenciable $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que $f_x = f_y = xy$.
7. Si $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es contínua, entonces existe un $\delta > 0$ tal que para todo $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$, si $\mathbf{x}' \in \mathbb{R}^2$ satisface $\|\mathbf{x}' - \mathbf{x}\| < \delta$ entonces $\|f(\mathbf{x}') - f(\mathbf{x})\| < 1$.
8. Si $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es una función diferenciable entonces existe una transformación lineal $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que $\lim_{\mathbf{v}\to 0}[f(\mathbf{x} + \mathbf{v}) - f(\mathbf{x}) - A\mathbf{v}]/\|\mathbf{v}\| = 0$ para todo $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$.
9. Si $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es una función diferenciable entonces para todo $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ existe una transformación lineal $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que $\lim_{\mathbf{v}\to 0}[f(\mathbf{x} + \mathbf{v}) - f(\mathbf{x}) - A\mathbf{v}]/\|\mathbf{v}\| = 0$.
10. Si $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es una función diferenciable en un punto $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ entonces $\lim_{\mathbf{v}\to 0}[f(\mathbf{x} + \mathbf{v}) - f(\mathbf{x})]/\|\mathbf{v}\|$ existe.
11. Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ es una función diferenciable y $f(t) \neq 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$ entonces $\frac{d}{dt}\|f(t)\| = \|\frac{d}{dt}f(t)\|$.
12. La superficie de un terreno está descrita por la ecuación $z = xy - x$. La coordenada z de un punto (x, y, z) de la superficie denota su altura. Estas en el punto de la superficie con coordenadas $(1, 1, 0)$, caminando hacia el noreste (tu proyección sobre el plano x, y avanza en la dirección del vector $(1, 1)$). Entonces tu camino está subiendo con una pendiente de 45 grados.
13. El conjunto $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^3 + y^3 = 1\}$ es un subconjunto cerrado de $\mathbb{R}^2$.
14. El conjunto $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^3 + y^3 = 1\}$ es un subconjunto acotado de $\mathbb{R}^2$.

    Nota: un subconjunto $C \subset \mathbb{R}^2$ es acotado si existe un $M > 0$ tal que $\|\mathbf{v}\| \leq M$ para todo $\mathbf{v} \in C$.
15. Si $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es una función diferenciable y $\nabla f(0,0) = 0$ entonces $(0,0)$ es un punto mínimo o máximo de f.
16. Si $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es una función diferenciable en $(2,3)$ entonces existen tres constantes $a, b, c \in \mathbb{R}$ tal que el límite

    $$\lim_{(x,y)\to(2,3)} \frac{f(x,y) - (ax + by + c)}{\sqrt{(x-2)^2 + (y-3)^2}}$$

    existe y es igual a 0.

17. Existen $a, b \in \mathbb{R}$ tal que el límite
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy - ax - by}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$
existe y es igual a 0.

18. Para todo $a, b \in \mathbb{R}$ el límite
$$\lim_{(x,y)\to(2,3)} \frac{xy - ax - by}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$
no existe.

19. Si $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es una función continua en $(0, 0)$ y $f(0, 0) = 0$ entonces existe una función lineal $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x, y) - L(x, y)}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0.$$

20. Sean f, g dos funciones diferenciables $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que $g(\mathbf{x}) \neq 0$ para todo $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$. Entonces f/g es tambien diferenciable.

21. Toda función diferenciable $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tiene un punto máximo.

22. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función diferenciable con una curva de nivel $C := f^{-1}(c) \subset \mathbb{R}^2$. Sea $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ una función diferenciable tal que $g(t) \in C$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Entonces para todo $t \in \mathbb{R}$, $\langle \nabla f(\mathbf{x}), g'(t)\rangle = 0$, donde $\mathbf{x} = g(t)$.

23. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función diferenciable tal que $f(\mathbf{x}) \neq 0$ para todo $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$. Entonces f y $1/f$ tienen los mismos puntos críticos.

24. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ y $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dos funciones diferenciables tal que $g(\mathbf{x}) = \sin(f(\mathbf{x}))$ para todo $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$. Entonces f y g tienen los mismos puntos críticos.

25. Si $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ es una función diferenciable biyectiva entonces su derivada $Df(\mathbf{x})$ es invertible para todo $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$.

26. Si $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ es una función diferenciable biyectiva con inversa diferenciable entonces su derivada $Df(\mathbf{x})$ es invertible para todo $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$.

27. Si $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ es una función contínua biyectiva entonces su inversa es contínua también.

28. Si $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ es una función diferenciable tal que su derivada $Df(\mathbf{x})$ es invertible para todo $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ entonces f es biyectiva.

29. Si $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tiene derivada invertible en todo $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ entonces sus componentes f_1, f_2 no tienen puntos críticos.

30. Si $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función contínua entonces la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x, y) = \int_x^y g(t)dt$ es diferenciable.

31. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ una transformación lineal. Entonces su derivada $Df(\mathbf{x})$ no depende de $\mathbf{x}$.

32. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ una función diferenciable tal que su derivada $Df(\mathbf{x})$ no depende de $\mathbf{x}$. Entonces f es una transformación lineal.

33. Si $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ y $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ son funciones diferenciables tal que $Df(\mathbf{x}) = Dg(\mathbf{x})$ para todo $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ entonces $f = g$.

34. Si $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es una función continua para todo $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ y diferenciable para todo $\mathbf{x} \neq (0, 0)$ entonces f es tambien diferenciable en $(0, 0)$.

35. Si $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es una función con derivadas parciales contínuas entonces su conjunto de puntos críticos es cerrado.

Ciertos: 1,4,5,6,9,13,16,17,18,20,22,23,26,27,29,30,31,35.