Exámen parcial núm. 2

14 nov, 2005

Duración: 2 horas.

Parte A (80 pts, 5 pts para cada inciso)

Encuentra

1. la recta que pasa por los puntos $(1, 0, 1)$ y $(0, 1, 0)$;
(Nota: "encontrar la recta" significa encontrar una ecuación paramétrica para la recta de la forma $x = At + B, y = Ct + D, z = Et + F$, con unos números $A, B, C, D, E, F \in \mathbb{R}$.)
2. el plano que pasa por los puntos $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ y $(1, 2, 3)$;
(Nota: "encontrar el plano" significa encontrar una ecuación de la forma $Ax + By + Cz = D$ con unos números $A, B, C, D \in \mathbb{R}$.)
3. el coseno del ángulo entre la recta en (1) y el plano en (2);
(Nota: el ángulo es entre 0 y 90 grados.)
4. el punto de interseccion de la recta en (1) con el plano en (2);
5. la recta que es la intersección del plano en (2) con el plano $x + y + z = 2$;
6. el coseno del ángulo entre los dos planos del inciso anterior.
(Nota: el ángulo es entre 0 y 90 grados.)
7. el plano que pasa por la recta en (5) y el punto $(2, 3, 4)$;
8. la distancia entre el punto $(1, 2, 3)$ y el plano dado por $x + y + z = 1$;
9. la distancia entre el punto $(1, 2, 3)$ y la recta en (1);
10. la distancia entre la recta en (1) y la recta en (5);
11. Los puntos en las rectas del inciso anterior que realizan la distancia entre las rectas.
12. La intersección de las medianas (baricentro) del tríangulo con vértices $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$ y $(1, 2, 3)$;
13. Los puntos en el interior del tríangulo del inciso anterior;
14. el volumen del tetraedro con vertices $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$ y $(1, 2, 3)$;
(Sugerencia: una pirámide con área de base=l y altura=1 tiene volumen= 1/3.)
15. el área de la superficie del tetraedro en (14);
16. el centro de masa del tetraedro en (14).

Parte B (20 pts)

1. (5 pts) Encontrar el polinomio de Taylor de grado 2 de la función $f(x, y) = e^x \cos(y)$ alrededor de $x = 0$, $y = \pi/2$.
2. (5 pts) Usar el inciso anterior para dar una aproximación de $e^{0.1} \cos(\pi/2 + 0.1)$.
3. (10 pts) Dar un estimado del error en el inciso anterior (por ejemplo: "con un máximo de 3 % de error", o "cierto hasta el segundo punto decimal").

Parte C (opcional, extra crédito)

Según Pitágoras, un triángulo rectángulo en el plano con catétos x, y tiene hipotenusa z dada por $z^2 = x^2 + y^2$. Sobre una esfera de radio 1, z está dada por $\cos(z) = \cos(x)\cos(y)$. Suponiendo que z^2 (no z) es una función infinitamente diferenciable en x, y,

1. demuestra que la serie de Taylor de z^2 alrededor de $x = y = 0$ empieza con $z^2 = x^2 + y^2 + O(\|(x, y)\|^4)$;
2. encuentra el siguiente término (de orden 4) en la serie de Taylor del inciso anterior;
3. A, B, C son tres ciudades en México tal que A se encuentra 300km al norte de C y B se encuntra 400km al este de C. Usando la fórmula del inciso anterior estima la corrección al Teorema de Pitágoras para la distancia entre B y C.

   (Sugerencia: usa el radio la tierra (6400km, aprox.) como la unidad de distancia para poder considerar la tierra como una esfera de radio 1.)