Cálculo 3, FAMAT-UG, aug-dic, 2006

Material para exámen final

Fecha del exámen: 5 dic, 2006

Definiciones:

Hay que saber las definiciones precisas de todos los siguientes términos, y conocer ejemplos concretos de cada uno.

La norma (estandar) de un vector en $\mathbb{R}^n$; subconjuntos abiertos/cerrados de $\mathbb{R}^n$; sucesión convergente en $\mathbb{R}^n$ y su límite; función contínua entre dos subconjuntos en $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{R}^m$, un conjunto de nivel de tal función; función difrenciable entre abiertos en $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{R}^m$, su derivada (o diferencial) en un punto, sus derivadas parciales y matriz Jacobiana; gradiente de una función real, punto crítico, hessiano; vector de velocidad de una curva parametrizada; cambio de coordenadas; coordenadas polares y esféricas; subespacio afin de un espacio vectorial; el producto vetorial (o producto cruz) en $\mathbb{R}^3$; forma cuadrática, forma cuadrática positiva/negativa definida; sección cónica. Mínimo/máximo local/global de una función. Conjunto convexo, función convexa.

Teoremas:

Hay que saber el anunciado preciso y las demostraciones de los siguientes teoremas.

1. La regla de la cadena.
2. Una función con derivadas parciales contínuas es diferenciable.
3. Una función diferenciable es contínua.
4. Un punto mínimo o máximo local de una función real diferenciable es un punto crítico.
5. Un punto crítico con hessiano positivo/negativo definido es un mínimo/máximo local.
6. Un mínimo local de una función convexa es un mínimo global.
7. Toda función contínua en un conjunto compacto tiene punto mínimo y máximo.
8. El teorema de función implicita para un sistema de n ecuaciones con m variables, $m \geq n$.
9. El teorema de función inversa.
10. Teorema de Taylor con resíduo de Lagrange.
11. El teormea de Lagrange sobre puntos críticos relativos (puntos críticos con condición subsidiaria)

Problemas:

1. Sea $v \in \mathbb{R}^n$ y $v_1, v_2, \ldots$ una sucesión de vectores en $\mathbb{R}^n$. Demuestra que los siguientes son equivalentes:
   a) $\lim_{i\to\infty} v_i = v$.
   b) $\lim_{i\to\infty} \|v_i - v\| = 0$.
   c) $\lim_{i\to\infty} \|v_i - v\|_1 = 0$, donde $\|\cdot\|_1$ denota la suma de los valores absolutos de las componentes de un vector.

d) Sea $v = (x^1, \ldots, x^n)$, $v_i = (x_i^1, \ldots, x_i^n)$. Entonces $\lim_{i\to\infty} x_i^k = x^k$ para $k = 1, \ldots, n$.
e) Para todo funcional lineal $\alpha \in (\mathbb{R}^n)^*$, $\lim_{i\to\infty} \alpha(v_i) = \alpha(v)$.
f) Para toda función continua $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\lim_{i\to\infty} f(v_i) = f(v)$.
g) Cada abierto $U \subset \mathbb{R}^n$ que contiene a v contiene a todos los v_i, excepto, posiblemente, un número finito de ellos.

2. Sea $r : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definido por $r(x) = \|x\|$ y $\alpha \in \mathbb{R}$.
   a) Demuestra que r^α es una función contínua en todo $\mathbb{R}^n$ para todo $\alpha \geq 0$ y que para $\alpha < 0$ es contínua en el complemento del origen.
   b) Encuentra los valores de α y $x \in \mathbb{R}^n$ tal que r^α es diferenciable en x y encuentra el gradiente en tales puntos.

3. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por $f(r, \theta) = (r\cos\theta, r \operatorname{sen}\theta)$.
   a) Demuestra que f es diferenciable y encuentra la matriz Jacobiana de f en un punto $(r, \theta) \in \mathbb{R}^2$.
   b) Encuentra un subconjunto abierto maximal $U \subset \mathbb{R}^2$ tal que $V = f(U)$ es abierto y la restricción de f a U define una biyección $U \to V$ cuya inversa es diferenciable.

   Sugerencia: la matriz Jacobiana de f debe ser invertible en todos los puntos de U. "Maximal"significa que no existe un abierto $U_1 \supseteq U$ con las mismas propiedades (a menos que $U = U_1$).

4. Demuestra que un punto crítico de una función convexa diferenciable es un punto mínimo.

5. Sean P_1, P_2, P_3 tres puntos distintos en $\mathbb{R}^2$ y no colineales. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la suma de las distancias a los tres puntos; o sea, $f(P) = \|P - P_1\| + \|P - P_2\| + \|P - P_3\|$.
   a) Demuestra que f es contínua.
   b) Demuestra que f es convexa.
   c) Demuestra que f es diferenciable en el complemento de $\{P_1, P_2, P_3\}$ y encuentra el gradiente de f en estos puntos.
   d) Demuestra que un punto $P \in \mathbb{R}^2 \setminus \{P_1, P_2, P_3\}$ es un punto crítico de f ssi lo tres vectores unitarios $(P - P_i)/\|P - P_i\|$, $i = 1, 2, 3$, forman los vértices de un tríangulo equilátero; o sea, si definimos $u_i = (P - P_i)/\|P - P_i\|$, entonces $\|u_1 - u_2\| = \|u_2 - u_3\| = \|u_3 - u_1\|$.

   Sugerencia: demuestra primero que $\nabla f = u_1 + u_2 + u_3$. Estudia luego la ecuación $u_1 + u_2 + u_3 = 0$ para tres vectores unitarios u_1, u_2, u_3.
   e) Demuestra: f tiene un mínimo único en $\mathbb{R}^2$. Si los tres ángulos del triángulo con vértices $\{P_1, P_2, P_3\}$ tienen menos de 120 grados, entonces el mínimo está dentro del triángulo. Si uno de los ángulos es $\geq 120^0$ entonces el mínimo es el corespondiente vértice.

6. *a*) Sea $V : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función diferenciable y $m \in \mathbb{R}$. Sea $E : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $E(x, y) = my^2/2 + V(x)$. Demuestra que si una función $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ satisface $mu''(t) = -V'(u(t))$ para todo $t \in \mathbb{R}$ entonces $E(u(t), u'(t))$ es una función constante.

   Sugerenecia: demuestra, usando la regla de la cadena, que $g(t) = E(u(t), u'(t))$ satisface $g'(t) = 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

b) Sea $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función diferenciable y $m \in \mathbb{R}$. Sea $E : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}$ dada por $E(x, y) = m\|y\|^2/2 + V(x)$ (estamos pensando en $x, y \in \mathbb{R}^n$ y $(x, y) \in \mathbb{R}^{2n}$). Demuestra que si una función $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ satisface $mu''(t) = -\nabla V(u(t))$ para todo $t \in \mathbb{R}$ entonces $E(u(t), u'(t))$ es una función constante.

Nota: el resultado de este problema se llama "la ley de conservación de energía para las soluciones de la ecuación de Newton". Se interpreta así: u representa el "movimiento en $\mathbb{R}^n$ de una partícula con masa m bajo la influencia de una fuerza $F = -\nabla V$", donde V es la "energía potencial" de la párticula, $m\|u'\|^2/2$ es su "energía cinética", $E(u(t), u'(t))$ la "energía total" y $mu'' = F$ es la "segunda ley de Newton".

7. Calcular el laplaciano de una función en $\mathbb{R}^2$ en coordenadas polares.
8. Calcular el laplaciano de una función en $\mathbb{R}^3$ en coordenadas esféricas.
9. Encontrar los primeros tres términos no triviales de la serie de Taylor de $f(x, y) = \log(\operatorname{sen} x + \cos y)$ alrededor de $x = y = 0$ y usarlo para estimar el valor de $f(0.1, 0.1)$.
10. Encontrar el punto sobre una línea dada en el plano que mínimiza la suma de las distancias a dos puntos dados.

    Sugerencia: se divide en dos casos, según si los dos puntos estan al mismo lado de la línea, o en lados opuestos.
11. Encontrar los dos puntos sobre dos líneas dadas en $\mathbb{R}^3$ con mínima distancia.
12. Dada una elipse $(x/a)^2 + (y/b)^2 = 1$, encontrar (1) la tangente más cercana, y (2) la tangente más lejana, a un punto dado $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$.
13. Calcular la curvatura máxima y mínima de la curva $x^2 + xy + y^2 = 1$.

"Cierto o Falso"

Nota: al final se encuentra la lista de los incisos ciertos. ¿Puedes aguantar la tentación de mirar las respuestas antes de pensar en los incisos? Algunos de los incisos no son tan fáciles. De hecho, hay un inciso que no puedo hacer. ¿Cuál es?

1. Todo subconjunto de $\mathbb{R}^2$ está contenido en un conjunto abierto.
2. Todo subconjunto no vacío de $\mathbb{R}^2$ contiene un subconjunto abierto no vacío.
3. La intersección de cualquer familia de abiertos en $\mathbb{R}^2$ es un abierto.
4. Existe una función diferenciable $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que $f(1, 2) = 3$, $f_x(1, 2) = 4$ y $f_y(1, 2) = 5$.
5. Existe una función diferenciable dos veces $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que $f(0, 0) = 1$, $f_x(0, 0) = 2$, $f_y(0, 0) = 3$, $f_{xx}(0, 0) + f_{yy}(0, 0) = 0$ y f no es un polinomio en dos variables.
6. No existe una función diferenciable $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que $f_x = f_y = xy$.
7. Si $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es contínua, entonces existe un $\delta > 0$ tal que para todo $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$, si $\mathbf{x}' \in \mathbb{R}^2$ satisface $\|\mathbf{x}' - \mathbf{x}\| < \delta$ entonces $\|f(\mathbf{x}') - f(\mathbf{x})\| < 1$.
8. Si $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es una función diferenciable entonces existe una transformación lineal $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que $\lim_{\mathbf{v}\to 0}[f(\mathbf{x} + \mathbf{v}) - f(\mathbf{x}) - A\mathbf{v}]/\|\mathbf{v}\| = 0$ para todo $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$.
9. Si $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es una función diferenciable entonces para todo $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ existe una transformación lineal $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que $\lim_{\mathbf{v}\to 0}[f(\mathbf{x} + \mathbf{v}) - f(\mathbf{x}) - A\mathbf{v}]/\|\mathbf{v}\| = 0$.
10. Si $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es una función diferenciable en un punto $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ entonces $\lim_{\mathbf{v}\to 0}[f(\mathbf{x} + \mathbf{v}) - f(\mathbf{x})]/\|\mathbf{v}\|$ existe.
11. Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ es una función diferenciable y $f(t) \neq 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$ entonces $\frac{d}{dt}\|f(t)\| = \|\frac{d}{dt} f(t)\|$.

12. La superficie de un terreno está descrita por la ecuación $z = xy - x$. La coordenada z de un punto (x, y, z) de la superficie denota su altura. Estas en el punto de la superficie con coordenadas $(1, 1, 0)$, caminando hacia el noreste (tu proyección sobre el plano x, y avanza en la dirección del vector $(1, 1)$). Entonces tu camino está subiendo con una pendiente de 45 grados.
13. El conjunto $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^3 + y^3 = 1\}$ es un subconjunto cerrado de $\mathbb{R}^2$.
14. El conjunto $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^3 + y^3 = 1\}$ es un subconjunto acotado de $\mathbb{R}^2$.
15. Si $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es una función diferenciable y $\nabla f(0, 0) = 0$ entonces $(0, 0)$ es un punto mínimo o máximo de f.
16. Si $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es una función diferenciable en $(2, 3)$ entonces existen tres constantes $a, b, c \in \mathbb{R}$ tal que el límite
$$\lim_{(x,y)\to(2,3)} \frac{f(x, y) - (ax + by + c)}{\sqrt{(x - 2)^2 + (y - 3)^2}}$$
existe y es igual a 0.
17. Existen $a, b \in \mathbb{R}$ tal que el límite
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy - ax - by}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$
existe y es igual a 0.
18. Para todo $a, b \in \mathbb{R}$ el límite
$$\lim_{(x,y)\to(2,3)} \frac{xy - ax - by}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$
no existe.
19. Si $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es una función continua en $(0, 0)$ y $f(0, 0) = 0$ entonces existe una función lineal $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x, y) - L(x, y)}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0.$$
20. Sean f, g dos funciones diferenciables $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que $g(\mathbf{x}) \neq 0$ para todo $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$. Entonces f/g es tambien diferenciable.
21. Toda función diferenciable acotada $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tiene un punto máximo.
22. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función diferenciable con una curva de nivel $C := f^{-1}(c) \subset \mathbb{R}^2$. Sea $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ una función diferenciable tal que $g(t) \in C$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Entonces para todo $t \in \mathbb{R}$, $\langle \nabla f(\mathbf{x}), g'(t) \rangle = 0$, donde $\mathbf{x} = g(t)$.
23. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función diferenciable tal que $f(\mathbf{x}) \neq 0$ para todo $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$. Entonces f y $1/f$ tienen los mismos puntos críticos.
24. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ y $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dos funciones diferenciables tal que $g(\mathbf{x}) = \operatorname{sen}(f(\mathbf{x}))$ para todo $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$. Entonces f y g tienen los mismos puntos críticos.
25. Si $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ es una función diferenciable biyectiva entonces su derivada $Df(\mathbf{x})$ es invertible para todo $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$.
26. Si $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ es una función diferenciable biyectiva con inversa diferenciable entonces su derivada $Df(\mathbf{x})$ es invertible para todo $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$.
27. Si $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ es una función contínua biyectiva entonces su inversa es contínua también.

28. Si $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ es una función diferenciable tal que su derivada $Df(\mathbf{x})$ es invertible para todo $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ entonces f es biyectiva.
29. Si $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tiene derivada invertible en todo $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ entonces sus componentes f_1, f_2 no tienen puntos críticos.
30. Si $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función contínua entonces la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x, y) = \int_x^y g(t)dt$ es diferenciable.
31. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ una transformación lineal. Entonces su derivada $Df(\mathbf{x})$ no depende de $\mathbf{x}$.
32. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ una función diferenciable tal que su derivada $Df(\mathbf{x})$ no depende de $\mathbf{x}$. Entonces f es una transformación lineal.
33. Sean $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ dos funciones diferenciables con la misma derivada ($Df(\mathbf{x}) = Dg(\mathbf{x})$ para todo $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$) y $f(0) = g(0)$. Entonces $f = g$.

Ciertos: 1,4,5,6,9,13,16,17,18,20,22,23,26,27,29,30,31,33.