Exámen Final

12 jun, 2006

Duración: 3 horas.

Resolver 4 de los siguientes 7 problemas.

1. Sea A un subconjunto de $\mathbb{R}^n$ y $f : A \to \mathbb{R}$ una función.
   a) Define: f es uniformamente contínua.
   b) Demuestra: si $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 \leq 1\}$ y $f : A \to \mathbb{R}$ es contínua entonces f es uniformamente contínua.
2. Sea $B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$ (la bola unitaria en $\mathbb{R}^3$.) Calcula el momento de inercia de B con respecto a una línea tangente a la frontera de B (por ejemplo, la línea paralela al eje de x que pasa por el punto $(0,0,1)$).

   Nota: el momento de inercia de un subconjunto medible $B \subset \mathbb{R}^3$, con respecto a una línea $l \subset \mathbb{R}^3$, se define como la integral sobre B del cuadrado de la distancia a l.
3. Definimos una forma lineal L en $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ por $L = [(x^2 - y^2)dx + 2xydy]/(x^2 + y^2)^2$.
   a) Decide si L es cerrada.
   b) Decide si L es exacta.
   c) Calcula la integral de línea de L a lo largo del arco de la elipse $x^2 + 7y^2 = 1$ que empieza en $(1,0)$ y termina en $(-1,0)$ y recorre la elipse en el sentido contrario a las manecillas del reloj.
4. Encontrar el volumen del conjunto $E \subset \mathbb{R}^3$ dado por
   $$E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | (x-1)^2 + 2(y-2)^2 + 3(z-3)^2 \leq 1\}.$$
5. Cierto o falso: existe en $\mathbb{R}^3$ una forma cuadrática α con la siguiente propiedad: para todo conjunto compacto medible $K \subset \mathbb{R}^3$ cuya frontera es una superficie regular $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ (con la orientación estandar), el volumen de K está dado por la integral de α sobre Σ.
6. Cierto o falso: existe en $\mathbb{R}^3$ una forma cuadrática α con la siguiente propiedad: para todo superficie regular orientada $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ el área de Σ está dado por el valor absoluto de la integral de α sobre Σ.
7. Calcular la integral de la forma cuadrática $ydzdx + zdydx$ (definida en $\mathbb{R}^3$) sobre el "hemisfério norte"de la esfera unitaria en $\mathbb{R}^3$ (el conjunto de los puntos $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ tal que $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ y $z \geq 0$) con su orientación estandar.