Cálculo 4, Facultad de Matemáticas de la UG, ene. – jun. 2006.

Tarea num. 7

(Por entregar el lunes, 3 abril, 2006.)

Usaremos las siguiente definiciones (vistas en la clase): una forma diferencial lineal en un abierto $U \subset \mathbb{R}^n$ es una expresión de la forma $L = \sum_{i=1}^n a_i dx_i$, donde las a_i son funciones en U. La diferencial de una función $f : U \to \mathbb{R}$ es la forma diferencial lineal $df = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i$. Una forma diferencial lineal es cerrada si sus coeficientes satisfacen $\frac{\partial a_i}{\partial x_j} = \frac{\partial a_j}{\partial x_i}$ para todo $1 \leq i, j \leq n$. Es exacta si $L = df$ para alguna función $f : U \to \mathbb{R}$. La integral de L sobre una curva parametrizada $\gamma : [a, b] \to U$ es la integral (de una variable)

$$\int_\gamma L = \int_a^b \sum_i (a_i \circ \gamma) \frac{d\gamma_i}{dt} dt.$$

La integral de línea de un campo vectorial $F : U \to \mathbb{R}^n$ se define como la integral de la forma $L = \sum_i F_i dx_i$.

NOTA: todas las funciones que aparecen aquí son diferenciables tantas veces como sea necesario (3 veces es suficiente.)

1. Demuestra que una forma diferencial lineal exacta es cerrada.

2. Demuestra que la forma diferencial en $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ dada por $L = (xdy - ydx)/(x^2 + y^2)$ es cerrada.

3. Demuestra que si L es una forma diferencial exacta, entonces su integral a lo largo de una curva depende solo del punto incial y final de la curva.

   Sugerencia: si $L = df$, demuestra que $\int_\gamma L = f(B) - f(A)$, donde $A = \gamma(a)$, $B = \gamma(a)$. Para esto hay que usar el teorema fundamental de cálculo: $\int_a^b g'(t)dt = g(b) - g(a)$.

4. Demuestra que la integral de línea de un campo gradiente $F = \nabla f$ a lo largo de una curva solo depende de los puntos extremos de la curva.

   Sugerencia: es una reformulación del problema anterior.

5. Demuestra que si γ es una curva cerrada en U $(\gamma(a) = \gamma(b))$ entonces la integral de cualquer campo gradiente en U alrededor de γ se anula.

6. Demuestra que la forma diferencial $L = (xdy - ydx)/(x^2 + y^2)$ en $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ no es exacta.

   Sugerencia: encuentra su integral a lo largo de la curva $\gamma(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$.

7. Sea $\gamma : [a, b] \to U$ una curva parametrizada y $\tilde{\gamma} : [a, b] \to U$ una reparametrización de γ; es decir $\tilde{\gamma} = \gamma \circ \phi$, donde $\phi : [a, b] \to [a, b]$ es una biección (diferenciable). Demuestra que para toda forma diferencial lineal L en U, $\int_{\tilde{\gamma}} L = \int_\gamma L$ si la reparametrización *preserva orientación*; es decir $\phi' > 0$.

8. Sea γ una curva cerrada parametrizada que atravieza el perímetro de un rectángulo en el plano en la direccion contraria a las manecillas del reloj. Demuestra que
   a) $\int_\gamma xdy = -\int_\gamma ydx = \int\int_R dxdy$.

      Nota: el último integral es simplemente el área de R.

   b) (Opcional) Para toda una forma diferencial lineal $L = adx + bdy$, $\int_\gamma L = \int\int_R (b_x - a_y)dxdy$.

9. Problema 1 de la pag.121.