Cálculo 4, Facultad de Matemáticas de la UG, ene. – jun. 2006.

Tarea num. 8

(Por entregar el lunes, 24 abril, 2006.)

NOTA: todas las funciones que aparecen aquí son diferenciables tantas veces como sea necesario (3 veces es suficiente.)

En la primera parte de esta tarea formulamos y demostramos "la fórmula de cambio de variable en la integral de línea". Luego vemos una aplicación de la integral de línea, en coordenadas polares, para la demostración de una desigualdad geométrica interesante. En el último problema (opcional) estudiamos una propiedad topológica básica de la integral de línea.

Todos estos desarrollos dependen de la siguiente definición.

Definición. Sea $f : U \to V$ una función diferenciable donde $U \subset \mathbb{R}^n$ y $V \subset \mathbb{R}^m$ son conjuntos abiertos, y sea $L = \sum_{i=1}^m a_i dy_i$ una forma diferencial lineal en V. Definimos a f^*L como la forma diferencial en U dada por

$$f^*L = \sum_{i=1}^{m} (a_i \circ f) df_i,$$

donde $f_1, \ldots, f_m$ son las componentes de f.

Nota: la forma f^*L se llama tradicionalmente "el resultado de hacer en L el cambio de variables $y_i = f_i(x_1, \ldots, x_n)$, $i = 1, \ldots, m$. En textos más modernos (en ingles) f^*L se llama el "pull-back" de L por f.

1. Con la notación de la definición arriba, si L es cerrada f^*L tambien lo es. (Ver la tarea 7 para la definición de "forma cerrada").

2. Sean U, V, W abiertos en $\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^l, \mathbb{R}^m$ (resp.), $g : U \to V$ y $f : V \to W$ funciones diferenciables y L una forma diferencial lineal en W. Demeuestra que
$$(f \circ g)^*L = g^*(f^*L).$$
Sugerencia: usar la regla de la cadena.

3. Sea U un abierto en $\mathbb{R}^n$, L una forma diferencial lineal en U y $\gamma : [a, b] \to U$ una curva. Demuestra que
$$\int_\gamma L = \int_a^b \gamma^* L.$$
Sugerencia: usar la regla de la cadena.

4. Demuestra "la fórmula de cambio de variable para la integral de línea": con la notación de la definición arriba, si γ es una curva parametrizada en U entonces
$$\int_{f\circ\gamma} L = \int_\gamma f^*L.$$

5. En este ejercisio usamos la integral de línea para demostar que entre todas las figuras en el plano con el mismo diámetro, el círculo es la figura con el mayor área.
   a) Sea $L = adx + bdy$ una forma diferencial en un abierto $U \subset \mathbb{R}^2$. Expresa L en coordenadas polares; o sea, calcula f^*L, donde $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ es la función dada por $f(r, \theta) = (r \cos\theta, r \operatorname{sen}\theta)$.

   b) Expresa la forma $L = (xdy - ydx)/2$ en coordenadas polares. (Respuesta: $L = r^2 d\theta/2$.)

c) Sea $A \subset \mathbb{R}^2$ un conjunto medible que contiene al orígen en su interior y cuya frontera está parametrizada por una curva cerrada γ, dada en coordenadas polares por una función $r(\theta)$. Demuestra que el área de A está dado por la integral

$$\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} r^2(\theta)d\theta.$$

d) Demuestra, usando el último inciso, que si el diámetro de A (=el supremo de distancias entre pares de puntos de A) es $\leq d$, entonces su área es $\leq \pi d^2/4$ (el área de un disco con diámetro d).

Sugerencia: suponemos (sin pérdida de generalidad) que A es convexo, que su frontera pasa por el origen, y que A se encuentra "a la derecha" del eje de y. Entonces el área de A está dado por

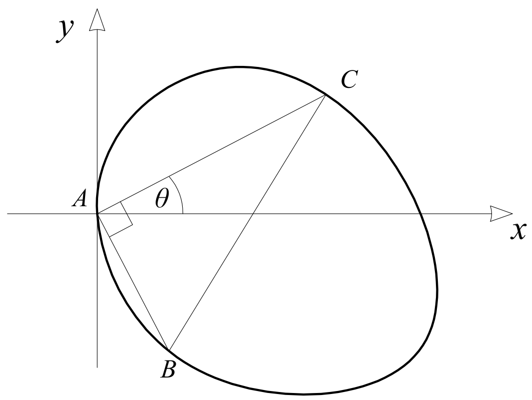
$$\frac{1}{2}\int_0^{\pi}[r^2(\theta)]^2 d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}[r^2(\theta) + r^2(\theta - \pi/2)]^2 d\theta.$$

Ahora observa en el dibujo que

$$r^2(\theta) = AC, \quad r^2(\theta - \pi/2) = AB,$$

y que

$$(AB)^2 + (AC)^2 = (BC)^2 \leq d^2.$$



6. Pág. 618-619 de Courant y John: 1,2,3,4.

7. (opcional) En este problema demostramos que "la integral de línea de una forma cerrada a lo largo de una curva cerrada es invariante bajo deformacioens de la curva". La formulación precisa es la siguiente:

Sea L una forma diferencial cerrada en un abierto $U \subset \mathbb{R}^n$ y sean $\gamma_0, \gamma_1 : [a, b] \to U$ dos curvas cerradas en U. Ahora suponemos que existe una función diferenciable $\Gamma : [a, b] \times [0, 1] \to U$ que satisface

- $\Gamma(t, 0) = \gamma_0(t)$, $\Gamma(t, 1) = \gamma_1(t)$, para todo $t \in [a, b]$,
- $\Gamma(a, s) = \Gamma(b, s)$ para todo $s \in [0, 1]$.

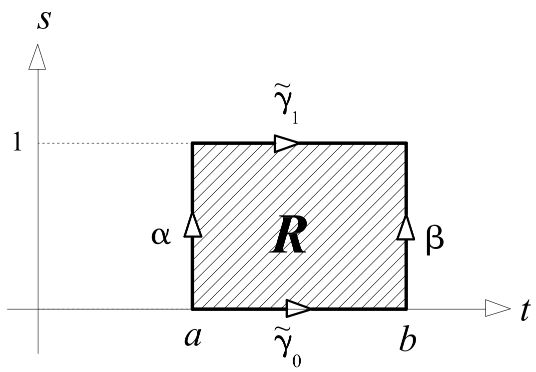
En el caso que existe tal Γ decimos que "se puede deformar γ_0 a γ_1 (o que son "homotópicas"), y que Γ es "la deformación" entre ellas.

Teorema. Si L es una forma cerrada y γ_0, γ_1 son dos curvas cerradas homotópicas, entonces

$$\oint_{\gamma_0} L = \oint_{\gamma_1} L.$$

Este teorema demostramos con lo siguientes pasos.

a) Consideramos el rectángulo $R = [a, b] \times [0, 1]$ (el dominio de Γ, en el plano t, s).



Sean $\tilde{\gamma}_0, \tilde{\gamma}_1, \alpha, \beta$ las curvas que parametrizan las aristas de R, como en el dibujo, y $\tilde{L} = \Gamma^* L$. Demuestra que

$$\int_{\tilde{\gamma}_0} \tilde{L} + \int_{\beta} \tilde{L} - \int_{\tilde{\gamma}_1} \tilde{L} - \int_{\alpha} \tilde{L} = 0.$$

Sugerencia: aplicar el teorema de la divergencia a la integral de la forma cerrada $\tilde{L}$ a lo largo de la frontera de R.

b) Demuestra que

$$\int_{\alpha} \tilde{L} = \int_{\beta} \tilde{L}.$$

Sugerencia: usar la fórmula de cambio variable y el hecho que $\Gamma(a, s) = \Gamma(b, s)$ para todo $s \in [0, 1]$.

c) Demuestra que

$$\int_{\tilde{\gamma}_i} \tilde{L} = \int_{\gamma_i} L, \qquad i = 0, 1.$$

Sugerencia: usar la fórmula de cambio variable.