Teoría de números, Taller de Cálculo, 3-7 de julio, 2006, CIMAT.

Tarea núm. 1

Algunas definiciones y resultados vistos en la clase:

- La *parte entera* de un número real x se define como $[x] := \max\{m|m \leq x\}$. Se define a la *parte fraccional* como $x \pmod 1 := x - [x]$.
- Un subconjunto $A \subset [0,1]$ es *denso* si para todo $[x,y] \subset [0,1]$ existe un $a \in A$ tal que $x < a < y$.
- Una sucesión de números reales $x_1, x_2, x_3, \ldots$ en $[0,1]$ es *uniformamente densa* (o "equi-distribuida") si para todo sub-intervalo $[a,b] \subset [0,1]$

$$\lim_{N\to\infty} \frac{\#\{x_j | 1 \leq j \leq N, a \leq x_j \leq b\}}{N} = b - a.$$

  Nota: si A es un conjunto finito, $\#A$ denota el número de elementos en A.

- **El criterio de Weyl**: una sucesión $x_1, x_2, x_3, \ldots$ en $[0,1]$ es equidistribuida ssi para todo $k = 1, 2, 3, \ldots$

$$\lim_{N\to\infty} \frac{\sum_{j=1}^{N} e^{2\pi i k x_j}}{N} = 0.$$

Problemas

1. Demuestra que $\log_{10} 2$ es irracional.
2. Sea α un número irracional. Verificar el criterio de Weyl para la sucesión $x_j = j\alpha \pmod 1$, $j = 1, 2, \ldots$.
3. Sea A el conjunto de los números naturales de la forma $17k + 5$ y sea a_N el número de elementos de A en el intervalo $[1, N]$. Demuestra que $\lim_{N\to\infty} a_N/N = 1/17$.
4. Sea α un número irracional y sea $x_j = j\alpha \pmod 1$, $j = 1, 2, 3, \ldots$. Demuestra que la sucesión $\{x_j\}$ es densa en $[0,1]$.

   Sugerencias: demuestra que $m \neq n \Longrightarrow x_m \neq x_n$. Concluya que la sucesión $\{x_j\}$ es infinita, por lo que tiene un punto de acumulación. Así que, dado $\epsilon > 0$, existen $m < n$ tal que $0 < |x_n - x_m| < \epsilon$. Si $k = n - m$ entonces $0 < |x_k| < \epsilon$ y la sucesión $x_k, x_{2k}, x_{3k}, \ldots$ "visita" cualquer intervalo $[a,b] \subset [0,1]$ con longitud $|b - a| \geq \epsilon$.

5. En este problema indicamos los pasos principales para la demostración del criterio de Weyl.
   a) Se define la norma de una función acotada $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ por $\|f\| = \sup\{|f(x)| x \in [0,1]\}$. Demuestra que si f es contínua entonces $|\int_0^1 f(x)dx| \leq \|f\|$.
   b) Una función $\phi : [0,1] \to \mathbb{R}$ es una función " de tipo escalera" si es constante por pedazos; o sea, existe una subdivisión $0 = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = 1$ y unos constantes $c_0, \ldots, c_n$ tal que $\phi(x) = c_i$ para $x \in [x_{i-1}, x_i)$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Demuestra que para toda función contínua $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ y $\epsilon > 0$ existe una función tipo escalera ϕ tal que $\|f - \phi\| < \epsilon$.
   c) Sea $\{x_j\} \subset [0,1]$ una sucesión y $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ una función. Define $S_N(f) := \left(\Sigma_{j=1}^{N} f(x_j)\right)/N$. Demuestra que la sucesión $\{x_j\}$ es uniformamente densa en $[0,1]$ ssi $S_N(\phi) \to \int \phi$ para toda ϕ de tipo escalera.
   d) Demuestra que una sucesión $\{x_j\} \subset [0,1]$ es uniformamente densa ssi $S_N(f) \to \int f$ para toda $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ contínua.
   e) Un polinomio trigonométrico en $[0,1]$ es una combinación lineal de funciones de la forma $e^{2\pi i k x}$ donde k es un número entero. Demuestra que para toda función contínua $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ y $\epsilon > 0$ existe un polinomio trigonométrico p tal que $\|f - p\| < \epsilon$. (Sugerencia: consultar una refrencia sobre la Transformada de Fourier).
   f) Demuestra que una sucesión $\{x_j\} \subset [0,1]$ es uniformamente densa ssi $S_N(p) \to \int p$ para todo polinomio trigonométrico p.
   g) Demuestra el criterior de Weyl.