Exámen Final

7 junio, 2007

Duración: 3 horas.

1. (40 pts) En cada uno de los siguientes incisos hay que dar un ejemplo del objeto indicado o demostrar que no existe.
   a) Un campo vectorial en $\mathbb{R}^2$ que se anula en un solo punto.
   b) Un campo vectorial en $\mathbb{R}^2$ que no es un campo gradiente.
   c) Un campo vectorial no nulo en $\mathbb{R}^3$ cuya divergencia se anula.
   d) Un campo vectorial no nulo en $\mathbb{R}^3$ cuyo rotacional se anula.
   e) Un campo vectorial no nulo en $\mathbb{R}^3$ cuyo integral de línea a lo largo de cualquer curva cerrada se anula.
   f) Un campo vectorial no nulo en $\mathbb{R}^3$ cuyo integral de superficie a lo largo de cualquer superficie cerrada orientada se anula.
   g) Un conjunto acotado con área $A \subset \mathbb{R}^2$ y una función contínua en A que no es integrable.
   h) Un abierto $U \subset \mathbb{R}^2$ y una forma lineal en U que es cerrada pero no exacta.
2. (40 pts) Calcular:
   a) El área de la superficie $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + y^2 + z^2 = R^2, a \leq z \leq b\}$, donde a, b, R son números reales tales que $0 \leq a < b \leq R$.
   b) El volumen del elipsoide $(x-1)^2 + 2(y-2)^2 + 3(z-3)^2 \leq 1$.
   c) La integral de la forma cuadrática $(xdydz + ydzdx + zdxdy)/(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}$ sobre la superficie $(x-1)^2 + 2(y-2)^2 + 3(z-3)^2 = 1$ (con su orientación usual).
   d) La integral de la función $f(x, y) = x^2 + y^2$ sobre la elipse $(x-1)^2 + 2(y-2)^2 \leq 1$.
3. (20 pts) Sea $A \subset \mathbb{R}^2$ un subconjunto.
   a) Define: A tiene área.
   b) Define: la frontera de A.
   c) Demuestra: si la frontera de A tiene area 0 entonces A tiene área.