Notas núm. 2

(En construcción)

Estas notas cubren las clases del curso desde 27 de agosto 2007. Los ejercicios están marcados con →.

Definición. Un **subgrupo de un parámetro** de un grupo de Lie es un homomorfismo suave $\phi : \mathbb{R} \to G$.

→**2.1.** Si A es una matriz real $n \times n$ entonces $e^{tA} := \sum_i t^n A^n/n!$ define un subgrupo de un parámetro de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.

Definición. Un **campo vectorial invariante por la izquierda** en un grupo de Lie es un campo vectorial X tal que $dL_g X = X$ para todo $g \in G$, donde $L_g : G \to G$ es la "translación por la izquierda por g", $g_1 \mapsto gg_1$.

Ojo: si $\phi : M \to N$ es un difeomorfismo y X es un campo vectorial en M entonces $d\phi X$ es el campo $(d\phi X)f = [X(f \circ \phi)] \circ \phi^{-1}$, $f \in C^\infty(N)$.

→**2.2.** Si A es una matriz real $n \times n$ entonces $X(g) = gA$ es un campo vectorial invariante por la izquierda en $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. (Ojo: estamos usando la identifocación de $T_g\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) = Mat_{n\times n}(\mathbb{R})$).

→**2.3.** Sean X, Y dos campos vectoriales en una variedad diferencial. Demuestra que $[X, Y] := XY - YX$ (el "corchete de Lie" de X y Y, o su "conmutador") es también un campo vectorial.

→**2.4.** Demuestra que el corchete de Lie es bilineal, antisimétrico y satisface $[[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] = 0$ (la identidad de Jacobi).

→**2.5.** Demuestra que si X, Y son campos vectoriales invariantes por la izquierda en un grupo de Lie entonces $[X, Y]$ también es un campo invariante por la izquierda.

→**2.6.** Demuestra que si X y Y son campos vectoriales en un abierto en un espacio euclideano $U \subset E$, considerados como funciones $U \to E$ (ver ejercicio de notas anterior), entonces $[X, Y] = (DY)X - (DX)Y$.

→**2.7.** Demuestra que si X, Y son dos campos vectoriales invariantes por la izquierda sobre $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ cuyos valores en I son las matrices A, B (resp.), entonces el valor de $[X, Y]$ en I es $AB - BA$ (conmutador de matrices).

Definición. Una **acción suave** de un grupo de Lie G en una variedad M es una función suave $\phi : G \times M \to M$, tal que $g \mapsto \phi(g, \cdot)$ define un homomorfismo $G \to \mathrm{Difeo}(M)$.

Definición. Un **flujo** en una variedad M, o un **grupo de difeomorfismos de un parámetro**, es una acción suave de $\mathbb{R}$ en M. Un **flujo local**, o un **grupo local de difeomorfismos de un parámetro**, es una función $\phi_t(x)$ definida en una vecindad de $\{0\} \times M \subset \mathbb{R} \times M$ (para cada $x_0 \in M$ existe una vecindad $U \subset \mathbb{R} \times M$ de $(0, x_0)$ tal que $\phi_t(x)$ está definido para todo $(t, x) \in U$), tal que $\phi_0 = id_M$ y $\phi_{t+s} = \phi_t \circ \phi_s$ (cuando está definido).

Teorema. (**El teorema de existencia y unicidad de soluciones a EDO**). Dado un campo vectorial X en una variedad M existe un flujo local $\{\phi_t\}$ tal que $\frac{\partial}{\partial t}|_{t=0}\phi_t(x) = X(x)$, para todo $x \in M$. Cualesquiera dos tales flujos coinciden en la intersección de sus dominios de definición.

→**2.8.** Encuentra los flujos asociados a los siguientes campos en $\mathbb{R}$: $\frac{d}{dx}$, $x\frac{d}{dx}$, $x^2\frac{d}{dx}$.

→**2.9.** El flujo asociado a un campo vectorial lineal $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es lineal, y está dado por $\phi_t = e^{tA}$.

→**2.10.** Para un campo invariante por la izquierda en un grupo de Lie, el flujo asociado es un flujo global, i.e. $\phi_t(x)$ está definido para todo $(t, x) \in \mathbb{R} \times G$.

→**2.11.** Encuentra el flujo asociado al campo vectorial invariante por la izquierda en $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ cuyo valor en I es A.

Teorema. Correspondencia 1-1

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{subgrupos de} \\ \text{1 parametro} \end{array} \right\} \longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} \text{campos invariantes} \\ \text{por la izquierda} \end{array} \right\} \longleftrightarrow T_eG.$$

La correspondencia está dada por $\phi \mapsto \dot{\phi}(0)$, $X \mapsto X(e)$.

Definición. La **álgebra de Lie** de G es el espacio tangente T_eG equipado con el corchete inducido por la identificación con los campos invariantes por la izquierda.

Definición. Una **álgebra de Lie** es un espacio vectorial con un corchete bilineal antisimétrico que satiface la identidad de Jacobi.

Ejemplos. La álgebra de Lie de un grupo de Lie. Los campos vectoriales en una variedad. Los campos vectoriales en $\mathbb{R}^n$ con diveregencia 0. Los campos vectoriales polinomiales en $\mathbb{R}^n$. El subespacio del último de polinomios de grado ≤ 2. (Reto: encuentra otras subalgebras no conmutativas de dimensión finita de los campos vectoriales en $\mathbb{R}$ o demuestra que no existen).

Definición. Un **subgrupo de Lie** de un grupo de Lie G es un grupo de Lie H con un homomorfismo $\iota : H \to G$ que es una inmersión. (Una inmesrión es una función suave entre variedades tal que su derivada es inyectiva en cada punto).

Ojo: la imagen de H en G es un subgrupo, pero no tiene que ser una subvariedad, y no tiene que ser un cerrado. El ejemplo típico es el subgrupo $\mathbb{R} \to S^1 \times S^1$ dado por $t \mapsto (e^{it}, e^{i\sqrt{2}t})$. Se puede demostrar que la imagen de $\mathbb{R}$ es un subgrupo isomorfo a $\mathbb{R}$ pero **denso** en $S^1 \times S^1$, por lo que no es cerrado y no es una subvariedad. Hay una buena razon para incluir estos ejemplos en la definición de subgrupo de Lie. Si insistimos que el subgrupo $\iota(H) \subset G$ sea una subvariedad de G (resulta que para esto basta pedir que $\iota(H)$ sea un subconjunto cerrado) dejaremos afuera un hueco importante en la correspondencia entre subgrupos de Lie y subalgebras de Lie (ver más adelante).

→**2.12.** Encontrar las álgebras de Lie de todos los ejemplos de Notas núm. 1.

Teorema. El teorema de Frobenius (integración de una distribución involutiva).

Teorema. Correspondencia 1-1: subalgebras de Lie $\leftrightarrow$ subgrupos de Lie.

Teorema. Correspondencia 1-1: homomorfismos de algebras de Lie $\leftrightarrow$ homomorfismos de grupos de Lie, siempre y cuando el grupo dominio es simplemnente conexo.

Ejemplo. Enfoque en los grupos SU_2 y SO_3: su topología, sus álgebras de Lie, sus subgrupos de Lie, el homomorfismo $\mathrm{SU}_2 \to \mathrm{SO}_3$, sus acciones lineales, relación con cuaterniones, sus fibracions y acciones sobre S^2 (Hopf).