Notas núm. 6

Estas notas cubren las clases del curso desde 22 de oct 2007. Los ejercicios están marcados con $\rightarrow$.

Definición. Una representación de una álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ es un homomorfismo de álgebras de Lie $\mathfrak{g} \to \mathrm{End}(V)$, donde $\mathrm{End}(V)$ es el espacio de endomorfismos de un espacio vectorial. La representación es real, compleja, etc si V es un espacio vectorial real, complejo etc.

$\rightarrow$**6.1.** Si $\phi : G \to Aut(V)$ es una representación lineal de un grupo de Lie entonces $d\phi(e)$ es una representación de la álgebra de Lie de G.

$\rightarrow$**6.2.** Encontrar las representaciones complejas de la álgebra de Lie de S^1 que vienen de representaciones del grupo.

Sugerencia: considerar la forma de Jordan de la matriz que define la representación.

$\rightarrow$**6.3.** La complexificación de una álgebra de Lie real es una álgebra de Lie compleja.

Sugerenecia: se extiende el corchete linealmente a la complexificación y se verifica que esto satiface las axiomas de álgebra de lie (bilineal, antisimétrico, y la identidad de Jacobi).

$\rightarrow$**6.4.** La complexificación de la álgebra de Lie de U_n o $GL_n(\mathbb{R})$ es isomorfa a la álgebra de Lie de $GL_n(\mathbb{C})$.

$\rightarrow$**6.5.** Toda representación compleja de una álgebra de Lie real se extiende, de manera única, a su complexificación.

Teorema. Clasificación de las representaciones irreducibles complejas de dimensión finita de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ (la álgebra de Lie de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$): para cada $n = 0, 1, 2, ...$ existe una única representación irreducible V_n de dimensión $n + 1$. Si denotamos por $H \in \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

entonces H actua en esta representación con valores propios $n, n-2, n-4, \ldots, -n$. (Los "pesos" de la representación).

Teorema. La representacion V_n de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ es isomorfa la acción infinitesimal que corresponde a la representación irreducible de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ en el espacio de polinomios complejos de dos variables, homogeneos de grado n (la acción es por subtitución).

$\rightarrow$**6.6.** V_n es auto-conjugada y auto dual.

Sugerencia: Calcular los pesos de $\overline{V}_n$ y V_n^* (i.e. diagonalizar la acción de H en estos espacios).

Definición. El producto tensorial de dos representaciones de un grupo de lie está dado por la fórmula $g \cdot (v \otimes w) = gv \otimes gw$. El producto tensorial de dos representaciones de un álgebra de lie está dado por la fórmula $X \cdot (v \otimes w) = Xv \otimes w + v \otimes Xw$.

$\rightarrow$**6.7.** Descomponer a $V_n \otimes V_m$ en suma directa de representaciones irreducibles.

Sugerencia: considerar los pesos de esta representación.

$\rightarrow$**6.8.** Una representación compleja irreducible V de la complexificación de un algebra de Lie $\mathfrak{g}$ sigue siendo irreducible al restringirla a $\mathfrak{g}$.

Definición. Sea V una representación compleja de un grupo G. Una **estrutura real** en V es una involución antilineal G-equivariante $C : V \to V$ (C=conjugación), i.e. $C^2 = I$. Una **estructura cuaterniona** es un automorfismo antilineal G-equivariante $J : V \to V$ tal que $J^2 = -I$.

→**6.9.** Demuestra que V tiene estructura real C ssi V es isomorfa a la complexificación de una representación real, $V = V_0 \otimes \mathbb{C}$, donde $V_0 \subset V$ es el subespacio fijo de C.

→**6.10.** Demuestra que V tiene estrutura cuaterniona J ssi la acción de G en V es mediante transformaciones $\mathbb{H}$-lineales, con respecto a una acción de $\mathbb{H}$ (los cuaterniones) en V, definida por $j \cdot v = Jv$.

Nota: Si V admite una estructura real se dice a veces que la representación "es una representación real" (en lugar de "V es la complexificación de una representación real". Si admita estructura cuaterniona se dice que "es una representación cuaterniona".

→**6.11.** real⊗real=real, real⊗cuaterniona=cuaterniona, cuaterniona⊗cuaterniona=real.

→**6.12.** La representaciones V_n de SU_2 son reales para n par, cuaterionas para n impar.

Sugerencia: demuestra primero que V_1 es cuaterniona. Se puede escribir una fórmula sensilla y misteriosa para J, y verificar que este J satisface las propiedades requeridas (SU_2-equivariante, antilineal y $J^2 = -I$). Pero esto no es muy satifactorio, ya que no es claro de donde viene la fórmula (y además se le olvida uno). Aquí esta otro camino. Considera a $\mathbb{H}$ como espacio vectorial (1-dimensional) sobre $\mathbb{H}$ *por la derecha*, i.e. $\mathbb{H}$ (escalares) actua en $\mathbb{H}$ (espacio vectorial) por multiplicacion por la derecha. Si restrinjimos esta acción a $\mathbb{C} \subset \mathbb{H}$ se convierte en espacio vectorial complejo (2-dimensional). Ahora sea Sp_1 el grupo de cuaterniones unitarios. Este grupo actua sobre $\mathbb{H}$ por multiplicación *por la izquierda*. Esta acción es $\mathbb{H}$-lineal (por la asociatividad de multiplicación de cuaterniones), y en particular $\mathbb{C}$ lineal, así que tenemos un homomorfismo $\mathrm{Sp}_1 \to \mathrm{Aut}_{\mathbb{H}}(\mathbb{H}) \subset \mathrm{Aut}_{\mathbb{C}}(\mathbb{H})$. Ahora escogemos en $\mathbb{H}$ una base compleja. Por ejemplo $\{1, j\}$. Esto define un isomorfismo $\mathrm{Aut}_{\mathbb{C}}(\mathbb{H}) \cong \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$, así que tenemos un homomorfismo $\mathrm{Sp}_1 \to \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$. Demuestra que esto define un isomorfismo $\mathrm{Sp}_1 \cong \mathrm{SU}_2$. Este isomorfismo manda V_1 a la acción de Sp_1 en $\mathbb{H}$, y define una estructura cuaterniona en V_1 (multiplicación a la derecha por j).

Luego, $V_n \subset V_1 \otimes \ldots \otimes V_1$ (n veces) y usas el ejercicio anterior.

→**6.13.** Una representacion compleja irreducible es auto-conjugada ssi es cuaterniona o real.

→**6.14.** Dar un ejemplo de una representación compleja que no es real ni cuaterniona.

Definición. La **realificación** de un espacio vectorial complejo V es el espacio vectorial real que se obtiene de V al restrigir la acción de los esclares a $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$. Se denota por $V_{\mathbb{R}}$. De este modo también se define la realificación de una representación compleja.

→**6.15.** Si V es una representación compleja, entonces $(V_{\mathbb{R}}) \otimes \mathbb{C} = V \oplus \overline{V}$.