Lista de temas para presentacions de alumnos

21 nov, 2007

1. **Geometría diferencial de una métrica bi-invariante en un grupo de Lie compacto.** Todo grupo de Lie compacto admite una métrica riemanniana bi-invariante (las translaciones por la izquierda y la derecha son isometrias). Por ejemplo, para $G = SU_2$ es la métrica estandar en la 3 esfera. Se trata de determinar las propiedad de esta métrica (geodésicas, curvatra) en términos de la estructura del grupo y su álgebra de Lie. Ejemeplo: toda geodésica es el traslado (por la izquierda o la derecha) de un subgrupo de un parámetro.

   Referencia: Helgason.
2. **El Teorema de Peter-Weyl para grupos compactos**. Hemos demostrado este teorema para grupo finito. El teorema es válido para cualquer grupo compacto, con pocas modificaciones (por la aparencia de espacios de dimensión infinita). Se requieren la introducción de ideas nuevas de analisis (como la convolución de dos funciones).

   Referencia: Adams.
3. **Representaciones del grupo simétrico y la descomposición del espacio de tensores bajo la acción del grupo general lineal.** Si uno considera el espacio de tensores de rango k, $V^{\otimes k} = V \otimes \ldots \otimes V$ (k veces), bajo la acción del grupo general lineal $GL(V)$ resulta que los subespacios de tensores simétricos $S^k(V)$ y antisimétricos $\Lambda^k(V)$ (cuando $k \leq \dim V$) son irreducibles. Para $k = 4$ los tensores de "tipo curvatura" se caracterizan por otras propiedades de simetría y tambien es un subespacio ireducible. En general, para encontrar todos los subespacios irreducibles de $V^{\otimes k}$ (bajo $GL(V)$) hay que considerar también la acción del grupo simétrico S_k. El resultado es que $V^{\otimes k}$ se descompone (bajo $GL(V) \times S_k$) en suma de subespacios irreducibles (sin multiplicidad) de la forma $U_\lambda \otimes V_\lambda$, donde λ es un "diagrama de Young" (un cierto arreglo de k cuadraditos).

   Es un tema un poco ambicioso así que se tendría que restringir a una parte del tema.

   Referencia: Fulton y Harris. Weyl (los grupos clásicos).
4. **El grupo fundamental y la cubierta universal de un grupo de Lie.** Sabemos que un homomorfismo de grupos de Lie G (por ejemplo una representación lineal de G) define un homomorfismo de sus álgebras de Lie $\mathfrak{g}$. Pero el converso no es cierto. Ver por ejemplo ejercicio 6.2 para $G = S^1$. Otro ejemplo: para $G = \mathrm{SO}_3$, solo "la mitad" de las representaciones de $\mathfrak{so}_3$, i.e. V_d con d par, vienen de representaciones de SO_3. Para d impar hay que pasar a SU_2, la cubierta universal de SO_3. El "culpable" en ambos casos resulta ser el grupo fundamental de G ($\mathbb{Z}$ para S^1, $\mathbb{Z}_2$ para SO_3).

   Para entender la situación en general se asocia con un grupo de Lie G su cubierta universal $\widetilde{G}$, que es tambien un grupo de Lie, $\pi_1(G) \subset \widetilde{G}$ es un subgrupo *abeliano normal*, y $G = \widetilde{G}/\pi_1(G)$. Luego, todo homomorfismo $\Phi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ (a cualquer álgebra de Lie $\mathfrak{h}$) viene de un homorfismo $\phi : \widetilde{G} \to H$, $\Phi = d\phi(e)$, único si G es conexo, y ϕ desciende a G ssi su restricción a $\pi_1(G)$ es trivial.

   Referencia: ??? (se puede empezar en Helgason).

5. **Clasificación de las representaciones irreducibles complejas de** SU_3. Se clasifica, como hemos hecho en caso de SU_2, mediante la clasificacion de las representaciones de su álgebra de Lie $\mathfrak{su}_3$. La clave es escoger una base cómoda para la complexificación $\mathfrak{su}_3 \otimes \mathbb{C} = \mathfrak{sl}_3(\mathbb{C})$ y "diagonalizar" la representación con respecto a un subálgebra conmutativa (matrices diagonales en $\mathfrak{sl}_3(\mathbb{C})$).

   Referencia: Fulton y Harris.
6. **Representaciones del grupo** E_2 **(movimeintos rígidos en** $\mathbb{R}^2$**) y las funciones de Bessel**. Una motivación para estudiar los grupos de Lie y sus representaciones es la manera en que funciones "especiales" y sus propiedades surgen por considerar representaciones de grupos de Lie. Por ejemplo, las funciones trigonometricas $\operatorname{sen}\theta, \cos\theta$ aparecen al considerar las representaciones de $G = SO_2$. En general, las funciones "especiales" en una variedad M en donde un grupo de Lie G actua trasitivamente son las funciones en M que aparecen en un subespacio irreducible $V \subset C(M)$. Ejemplo visto en clase: $M = S^2$, $G = SO_3$, $V =$polinomios armónicos (homogeneous de cierto grado). Para $G = E_2$ aparecen las funciones de Bessel. De este modo podemos "explicar" y descubrir propiedades de estas funciones (ecuaciones diferenciales, relaciones funcionales) desde un punto de vista de teoría de la teoría de representación de grupos de Lie.

   Referencia: Vilenkin.