Solución del problema 6.13

21 nov, 2007

El problema. Demostrar que una representación compleja irreducible V de un grupo G es autoconjugada, $V \cong \overline{V}$, ssi es cuaterniona o real.

Nota: el anunciado original del problema no incluye la condición de "irreducible". Esto es un error (ejercicio!).

Demostración: si la representación es real o cuaterniona tenemos en ambos casos un isomorfismo G-equivariante $\phi : \overline{V} \to V$ ($\phi = C$ en el caso real y $\phi = J$ en el caso cuaterniona).

En la otra dirección, si existe un isomorfismo (lineal complejo) $\phi : \overline{V} \to V$, o sea un endmorfismo G-equivariante *anti-lineal* $\phi : V \to V$, entonces $T := \phi^2$ es un endomorfismo G-equivariante lineal-complejo, así que por el lema de Schur, $T = \lambda I$, $\lambda \in \mathbb{C}$. Ahora si definimos $\widetilde{\phi} := \alpha\phi$, $\alpha \in \mathbb{C}$, tenemos que $\widetilde{\phi}^2 = |\alpha|^2\phi^2 = |\alpha|^2\lambda I$, así que podemos suponer que $|\lambda| = 1$. Ahora T y ϕ obviamente conmutan y uno verifica que $T\phi = \lambda\phi$, $\phi T = \overline{\lambda}\phi$, así que $\overline{\lambda} = \lambda$. Junto con $|\lambda| = 1$ esto implica que $\lambda = \pm 1$. $\square$

Notas:

1. En la clase hoy dimos una demosración para el caso de una representación unitaria (para un grupo compacto, por ejemplo). La demostración aquí es más general, aunque a la mejor más misteriosa.

2. Es importante notar que las dos opciones (real y cuaterniona) son mutualmente exclusivas (otro ejercicio!).

3. Para grupos compactos (en particular finitos), hay un criterio en términos del caracter, para saber si una representación es autoconjugada, y en caso que sí, si es real o cuaterniona. Puedes descubrir estos criterios?