Exámen final

Sábado, 6 dic, 2008

Duración del examen: 3 hrs.

1. (20 pts) Sean $a, n \in \mathbb{Z}$, donde $n > 1$.
   a) (1 pt) Define: a y n son primos relativos.
   b) (1 pt) Define: $b \in \mathbb{Z}$ es un recíproco de a mod n.
   c) (10 pts) Demuestra: a tiene un recíproco mod n ssi a y n son primos relativos.
   d) (4 pts) Encuentra un recíproco de 7 mod 2008.
   e) (4 pts) Encuentra el número de enteros a en el rango $0 \leq a < 2008$ que son primos relativos a 2008.

2. *a*) (1 pt) Define: el producto escalar de dos vectores en $\mathbb{R}^2$.
   b) (1 pt) Define: la norma de un vector en $\mathbb{R}^2$.
   c) (18 pts) Demuestra: para todo $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in \mathbb{R}^2$, $\|\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2\| \leq \|\mathbf{v}_1\| + \|\mathbf{v}_2\|$.

3. *a*) (10 pts) Encuentra una transformación lineal $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ que manda la elipse $x^2 + 2y^2 = 3$ a un círculo.
   b) (10 pts) Encuentra una rotación $\rho : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ que manda la elipse $x^2+2xy+3y^2 = 4$ a una elipse que tiene su eje mayor a lo largo del eje de x.

4. (20 pts) Factoriza el polinomio $x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6$ en factores irreducibles en $\mathbb{R}[x]$. (Es decir, expresalo como producto de polinomios con coeficientes reales de grado más bajo posible).

5. (20 pts) Encuentra una transformación de Möbius que manda la recta $y = 1$ al círculo $x^2 + y^2 = 1$.