Material para exámen parcial núm. 2

Fecha del exámen: viernes, 7 nov, 2008

Definiciones:

Hay que saber las definiciones precisas de los siguientes términos, y conocer ejemplos concretos de cada uno.

- Suma de vectores y producto de un vector por escalar, producto escalar de dos vectores, ángulo entre dos vectores, norma de un vector, distancia entre dos puntos , isometría (todo en $\mathbb{R}^2$).
- Recta, rectas paralelas y perpendiculares, pendiente de una recta, ángulo entre rectas, segmento de recta.
- Círculo, su centro, diámetro, cuerda, tangente.
- Transformación lineal, su determinante, kernel, polinomio característico, valores y vectores propio. Rotación, transformación lineal simétrica. Forma cuadrática.
- Elipse, sus focos, eje mayor y menor. Parábola, su foco y directriz, vértice. Hipérbola, sus focos y asíntotas.

Teoremas:

Hay que saber los anunciados precisos y las demostraciones de las proposiciones anunciadas al inicio de las tareas 6 a 12.

Problemas:

Hay que saber resolver los problemas de la tarea 6 hasta 12 (excepto los opcionales, marcados con *). Aquí hay problemas adicionales del tipo que aparecerá en el examen.

1. En cada uno de los siguientes incisos hay que encontrar una ecuación de la forma $Ax + By + C = 0$ para la recta con las propiedades indicadas. A veces hay más que una recta.
   a) Pasa por $(1, 2)$ y $(-1, -3)$.
   b) Pasa por $(1, 2)$ y paralela a la recta $x + y + 1 = 0$.
   c) Pasa por $(1, 2)$ y perpendicular a la recta $x + y + 1 = 0$.
   d) Pasa por $(1, 2)$ y forma ángulo de 60 grados con la recta $x + y + 1 = 0$.
   e) Equidistante a $(1, 2)$ y $(-1, -3)$.
   f) Pasa por $(1, 2)$ y tangente al círculo con centro en $(-1, -3)$ y radio 1.
   g) Pasa por los dos focos de la elipse $x^2 + 2xy + 4y^2 = 1$.
   h) La directriz de la parábola $x^2 + 4xy + 4y^2 = x$.
   i) Tangente al círculo con centro en $(-1, -3)$ y radio 1 y al círculo con centro en $(1, 3)$ y radio 2.
2. En cada uno de los siguientes incisos hay que encontrar el centro y radio del círculo (o círculos) con las propiedades indicadas.
   a) Tiene la ecuación $4x^2 + 4y^2 = 10$.
   b) Tangente al eje de x, eje de y y la recta $x + 2y = 3$.
   c) Pasa por $(1, 1)$, $(2, 1)$, $(2, 2)$.
   d) Es la imagen del círculo $x^2 + y^2 = 1$ bajo la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por $f(\mathbf{v}) = 2\mathbf{v} + (1, 2)$.
   e) Es la imagen del círculo $(x-2)^2+y^2 = 1$ bajo la función $f : \mathbb{R}^2\setminus\{0\} \to \mathbb{R}^2$ dada por $f(\mathbf{v}) = \mathbf{v}/\|\mathbf{v}\|^2$.
   f) Contiene el conjunto de los puntos $P = (x, y)$ en el plano tal que (1) $y > 0$, (2) los vectores $\mathbf{v}_1 = (1, 0) - P$ y $\mathbf{v}_2 = (2, 0) - P$ forman un ángulo de 60^0.
3. Tres vectores en $\mathbb{R}^2$ tienen la misma norma y su suma se anula. Demuestra que forman los vértices de un triánguo equilatero.
4. Cierto o Falso:
   a) La imagen de una recta en $\mathbb{R}^2$ bajo una transformación lineal invertible es una recta.
   b) La imagen de una elipse en $\mathbb{R}^2$ bajo una transformación lineal invertible es una elipse.
   c) La imagen de un círculo en $\mathbb{R}^2$ bajo una transformación lineal invertible es un círculo.
   d) Para toda forma cuadrática Q existe una transformación lineal simétrica L tal que $Q(\mathbf{v}) = \langle \mathbf{v}, L\mathbf{v} \rangle$.

e) Toda transformación lineal en $\mathbb{R}^2$ tiene un valor propio.
f) Una rotación por el origen de $\mathbb{R}^2$ es una isometria lineal.
g) Una isometria lineal de $\mathbb{R}^2$ es una rotación.
h) Una reflexión por una recta en $\mathbb{R}^2$ es una isometría lineal.
i) Toda transformación lineal simétrica en $\mathbb{R}^2$ tiene un valor propio.
j) Dos rectas con la misma pendiente son paralelas.

5. Sea E el conjunto de los puntos $(P + 2Q)/3$, tal que P está sobre el eje de x, Q está sobre el eje de y, y $dist(P, Q) = 1$. Demuestra que E es una elipse y encuentra sus focos.
6. (Los "círculos de Ford"). Para cada $r = a/b \in \mathbb{Q}$, dado en "forma reducida"(i.e. a, b son primos relativos), se define un círculo C_r en $\mathbb{R}^2$ con centro en $(r, 1/2b^2)$ y radio $1/2b^2$. Demuestra que (1) C_r es tangente al eje de x en $(r, 0)$, (2) cualquer dos de los círculos son disjuntos o tangentes. (3) Si $r, r' \in \mathbb{Q}$, con $r = a/b$, $r' = a'/b'$ (en forma reducida), entonces C_r y $C_{r'}$ son tangentes (o "adyacentes") ssi $ab' - ba' = \pm 1$. (4) Si C_r y $C_{r'}$ son adyacentes con $r = a/b$, $r' = a'/b'$, entonces todos los círculos $C_{r''}$ adyacentes a C_r están dados por $r'' = (a' + na)/(b' + nb)$, $n \in \mathbb{Z}$. En particular, los únicos círculos $C_{r''}$ adyacentes a ambos C_r y $C_{r'}$ están dados por $r'' = (a' + a)/(b' + b)$ (para el círculo "entre" C_r y C'_r), y $r'' = (a' - a)/(b' - b)$ (cuando $r < r'$ y $b < b'$) ó $r'' = (a - a')/(b - b')$ (cuando $r < r'$ y $b' < b$). (5) Si $r = a/b$, $r' = a'/b'$ son adyacentes (i.e. $ab' - ba' = \pm 1$), digamos con $r < r'$, entonces $r'' = (a' + a)/(b' + b)$ es número racional con el mínimo denomindaor que satiface $r < r'' < r'$. (5) La fracción "más sensilla" (con el mínimo denomoinador) entre $1/10$ y $1/11$ es $2/21$.
7. * Sean $A, B \subset \mathbb{R}^2$ dos conjuntos disjuntos, cada uno con n elementos. Demuestra: si $A \cup B$ está en "posicion general"(no contiene 3 puntos colineales) entonces existe una biyección $f : A \to B$ tal que para cualque par de puntos distintos $a_1, a_2 \in A$, los dos segmentos $[a_1, f(a_1)]$, $[a_2, f(a_2)]$ no se intersectan.
8. Una transformación afin $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ es una composición de biyección lineal y translación, o sea una función de la forma $A(\mathbf{v}) = L\mathbf{v} + \mathbf{v}_0$ donde $\mathbf{v}_0 \in \mathbb{R}^2$ y $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ es una transformación lineal invertible.
   a) La composición de dos transformaciones afines es una transformación afin. La inversa de una transformación afin es una transformación afin.
   b) Bajo una transformación afin, la imagen de una recta es una recta y la imagen de rectas paralelas es rectas paralelas. Para cualquer dos rectas l, l' existe una transformación afin que manda l a l'.
   c) * Si una biyección $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ manda rectas a rectas entonces A es una transformación afin.
   d) Dados 3 puntos no colineales $P_1, P_2, P_3 \in \mathbb{R}^2$, y otros 3 puntos P'_1, P'_2, P'_3 no colineales, existe una única transformación afin A tal que $A(P_i) = P'_i$, $i = 1, 2, 3$.
   e) Sean $P_1, P_2, P_3 \in \mathbb{R}^2$ tres puntos distintos colineales, $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ una transformación afin y $P'_i = A(P_i)$. Entonces
   $$\frac{dist(P_1, P_2)}{dist(P_2, P_3)} = \frac{dist(P'_1, P'_2)}{dist(P'_2, P'_3)}.$$
   f) Una función $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ es una transformación afin ssi para todo n puntos $P_1, \ldots, P_n$ y n escalares $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ con $\sum_i \lambda_i = 1$, $A(\sum_i \lambda_i P_i) = \sum_i \lambda_i A(P_i)$.
   g) Una transformación afin de $\mathbb{R}^2$ manda elipses a elipses, parábolas a parábolas e hipérbolas a hipérbolas. Una transformación afin manda el centro de una elipse al centro de la elipse imagen.
   h) Para cada elipse $\mathcal{E} \subset \mathbb{R}^2$ existe una transformación afin que manda $\mathcal{E}$ al círculo $x^2 + y^2 = 1$. Formula y demeuestra incisos similares para parábola e hipérbola.
   i) Dada una parábola $\mathcal{P}$ en $\mathbb{R}^2$, un par de puntos distintos $Q_1, Q_2 \in \mathcal{P}$, y cualquer otro par de puntos distintos $Q'_1, Q'_2 \in \mathcal{P}$, existe una única transformación afin A que deja a $\mathcal{P}$ invariante (i.e. $A(\mathcal{P}) = \mathcal{P}$), y tal que $A(Q_1) = Q'_1$, $A(Q_2) = Q'_2$. Formula y demuestra incisos similares para parábola e hipérbola.
   Sugerencia: considerar primero la parábola $y = x^2$ y los puntos $Q_1 = (0, 0)$, $Q_2 = (1, 1)$.