Exámen parcial 1

Viernes, 12 sept, 2008

1. *a*) (5 pts) Sea $p \in \mathbb{Z}$. Define: p es un primo.

   b) (20 pts) Demuestra: existe una infinidad de primos de la forma $4k+3$, $k \in \mathbb{Z}$.

2. *a*) (5 pts) Sean $a, b \in \mathbb{Z}$. Define: a, b son primos relativos.

   b) (20 pts) Demuestra: si $p \in \mathbb{Z}$ es un primo entonces $a^p \equiv a \mod p$ para todo $a \in \mathbb{Z}$.

3. (50 pts, 5 pts cada inciso) Hay que responder "Cierto" o "Falso" a cada uno de los incisos abajo, y luego dar una explicación *breve* (1-2 frases, no tienes que dar una demostración formal completa.)

   Ejemplos

   - "Todo impar es primo." Falso: 9 es impar pero no es primo.
   - "3 tiene un recíproco mod 77." Cierto: ya que 3 y 77 son primos relativos y hemos demostrado que si a y n son primos relativos, $n > 1$, entonces a tiene un recíproco mod n.

   Los incisos

   a) Existe un entero positivo k tal que $2^k \equiv 3 \mod 1000$.

   b) Para todo enteros positivos m, n, si m tiene un recíproco mod n entonces n tiene un recíproco mod m.

   c) Para todo entero n en el rango $1 \leq n \leq 2008$, la representación de n en base 2 requiere no más que 10 dígitos.

   d) Para todo entero n, si 22 y 23 dividen a n entonces $22 \cdot 23$ también divide a n.

   e) Existe un entero n tal que $n^{99} \equiv 100 \mod 101$.

   f) Existe un entero n tal que $n^{99} \equiv 2008 \mod 101$.

   g) Para todo enteros positivos m, n, su mínimo común múltiplo divide a mn.

   h) 3 divide a $1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^{2008}$.

   i) Sean $p_1 < p_2 < \ldots < p_{1000}$ primos distintos. Existe un entero $k > 1$ tal que k^2 divide a $p_1 p_2 \cdots p_{1000}$.

   j) Existen enteros positivos a, b tal que $3^a = 5^b$.