Tarea núm. 11

(Para el viernes 24 oct 2008)

Definiciones

- Para una transformación lineal $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $L(x, y) = (ax + by, cx + dy)$, su determinante es el número $det(L) = ad - bc$.
- El kernel de una transformación lineal $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ es el conjunto $ker(L) = \{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n \mid L(\mathbf{v}) = 0\}$.

Problemas

1. Sean $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in \mathbb{R}^2$, $\mathbf{v}_i = (x_i, y_i)$, $i = 1, 2$. Entonces existe una $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $\mathbf{v}_1 = \lambda\mathbf{v}_2$ o $\mathbf{v}_2 = \lambda\mathbf{v}_1$ ssi $x_1y_2 - y_1x_2 = 0$.
2. Sea $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ una transformación lineal. Entonces L es inyectiva ssi $ker(L) = \{0\}$ (el conjunto que consiste solamente en el vector nulo de $\mathbb{R}^n$).
3. Sea $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ una transformación lineal.
   a) Existen números $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tal que $L(x, y) = (ax + by, cx + dy)$ para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

      Sugerencia: define $(a, c) = L(1, 0)$, $(b, d) = L(0, 1)$.

   b) Si L es una rotación de $\mathbb{R}^2$ (ver la sección de definiciones de la tarea anterior) entonces tiene determinante 1.

   c) Cierto o falso: si $det(L) = 1$ entonces L es una rotación.

   d) Si L es no nula con $det(L) = 0$ entonces (1) la imagen de L es una recta que pasa por el origen, (2) $ker(L)$ (ver la definición arriba) es una recta por el origen.

   e) $ker(L)$ puede ser solamente una de las siguientes 3 posibilidades: (1) $\mathbb{R}^2$, (2) una recta por el origen, (3) $\{0\}$.
4. a) Dadas dos transformaciones lineales $L_1, L_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, la composición de las dos transformaciones $L_1 \circ L_2$ es una transformación lineal también, y se tiene que $det(L_1 \circ L_2) = det(L_1)det(L_2)$.

   b) Si $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ es invertible entonces $det(L^{-1}) = 1/det(L)$.

      Sugenerencia: usar el inciso anterior y $det(I) = 1$, donde I es la transformación identidad de $\mathbb{R}^2$.
5. Las siguientes tres condiciones para una tranformación lineal $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ son equivalentes:
   a) L es una isometría (o sea biyectiva y preserva distancias).
   b) L preserva norma (o sea $\|L(\mathbf{v})\| = \|\mathbf{v}\|$ para todo $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$).
   c) L preserva el producto escalar (o sea $\langle L\mathbf{v}_1, L\mathbf{v}_2\rangle = \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\rangle$ para todo $\mathbf{v}, \mathbf{v}_2 \in \mathbb{R}^2$).

   Sugerencia para (b) $\Longrightarrow$ (c): demuestra primero la identidad $\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\rangle = (\|\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2\|^2 - \|\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2\|^2)/4$.
6. * Cierto o Falso: existen dos transformaciones lineales $A, B : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $AB - BA = I$.