Tarea núm. 14

(Para el viernes 21 nov 2008)

Definiciones

- Una transformación lineal fraccional (o "transformación de Möbius") es una función $f : \mathbb{C}\cup\infty \to \mathbb{C}\cup\infty$ de la forma $f(z) = (az+b)/(cz+d)$, para todo $z \in \mathbb{C}\backslash\{\infty, -d/c\}$, donde $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ tal que $ad-bc \neq 0$. Luego se define $f(-d/c) = \infty$ y $f(\infty) = a/c$, si $c \neq 0$. Si $c = 0$ se define $f(\infty) = \infty$.

Algunas proposiciones vistas en clase

- Todo polinomio en una variable con coeficientes reales es un producto de polinomios con coeficientes reales de grado ≤ 2.
- El conjunto de tranformaciones lineales fraccionales forma un "grupo" (es cerrado bajo composición e inversa).
- A cada transformación lineal invertible $T : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$, $T(z, w) = (az + bw, cz + dw)$, asociamos la transformación lineal fraccional $f_T(z) = (az + b)/(cz + d)$. Entonces $f_{T_1} \circ f_{T_2} = f_{T_1 \circ T_2}$ y $f_I = id$.
- Toda transformación lineal fraccional es una composición de traslación ($z \mapsto z + b$), rotación ($z \mapsto az$ con $|a| = 1$), dilatación ($z \mapsto rz$ con $r > 0$) e inversión-reflexión ($z \mapsto 1/z$). (Nota: inversión es $z \mapsto 1/\bar{z}$ y no es una transformación lineal fraccional).
- Toda transformación lineal fraccional manda círculos y rectas a círculos y rectas. (Completaremos esta demostración la próxima semana)

Problemas

1. Factorizar en factores irreducibles (i.e. factores de grado mínimo) en $\mathbb{C}[z]$.
   (a) $z^3 + z^2 + z + 1$, (b) $z^5 - z^4 + z^3 - z^2 + z - 1$, (c) $z^6 + z^3 + 1$.
2. Factorizar los polinomios anteriores en factores irreducibles en $\mathbb{R}[z]$.
3. Encontrar los valores de $a, b, c \in \mathbb{C}$ para los cuales la ecuación $az + b\bar{z} + c = 0$ describe (a) una recta, (b) un solo punto.
4. *a*) Dados 3 puntos distintos $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C} \cup \infty$, existe una única transformación lineal fraccional $f : \mathbb{C} \cup \infty \to \mathbb{C} \cup \infty$ tal que $f(z_1) = 1$, $f(z_2) = 0$,, $f(z_3) = \infty$.
   b) Encontrar la transformación lineal fraccional que manda $1, i, -1$ a $1, 0, -1$ (en este orden).
   c) Toda transformación lineal fraccional que manda el eje real a su mismo está dada por $f(z) = (az + b)/(cz + d)$ con $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.
   d) Encontrar todas las transformaciones lineales fraccionales que mandan el círculo $|z| = 1$ a su mismo.
5. Si $T_1, T_2 : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ son transformaciones lineales, entonces $f_{T_1} = f_{T_2}$ ssi $T_1 = \lambda T_2$, con $\lambda \in \mathbb{C}$, $\lambda \neq 0$.
6. Sea $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ una transformación lineal invertible, i.e. $T(x, y) = (ax + by, cx + dy)$, con $det(T) = ad - bc \neq 0$. Demuestra que si $l \subset \mathbb{R}^2$ es una recta con pendiente $m \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, entonces $T(l)$ es una recta con pendiente m', donde $1/m' = f_T(1/m) = (a/m + b)/(c/m + d)$.
7. * Dados 4 puntos distintos $z_1, z_2, z_3, z_4 \in \mathbb{C}$ se define su razon cruzada por
   $$(z_1, z_2, z_3, z_4) = \left(\frac{z_1 - z_3}{z_1 - z_4}\right) / \left(\frac{z_2 - z_3}{z_2 - z_4}\right).$$
   a) Toda transformación lineal fraccional preserva la razon cruzada: $(f(z_1), f(z_2), f(z_3), f(z_4)) = (z_1, z_2, z_3, z_4)$.
   b) Dados dos cuadruples de números complejos distintos z_1, z_2, z_3, z_4 y z_1', z_2', z_3', z_4', existe una transformación lineal fraccional que manda $z_i \mapsto z_i'$ ssi $(z_1, z_2, z_3, z_4) = (z_1', z_2', z_3', z_4')$.