Tarea núm. 6

para entregar el viernes 19 de sept.

Definiciones.

- Una *recta* en $\mathbb{R}^2$ es el cojunto de soluciones a una ecuación de la forma $Ax + By + C = 0$, donde $A \neq 0$ ó $B \neq 0$.

  Por ejemplo: $l = \{(x, 0) \mid x \in \mathbb{R}\}$ ("el eje de x") es una recta ya que $l = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 0\}$. En este caso, $A = C = 0$, $B = 1$.
- Si dos rectas distintas no se intersectan (=tienen intersección vacía) se dice que son *paralelas*.

  Por ejemplo, la recta dada por $x = 1$ es paralela al eje de y.

Proposiciones (demostrado en clase).

- Dadas dos rectas distintas, su intersección contiene un solo punto, o son paralelas.
- Dados dos puntos distintos, existe una sola recta que los contiene.

Problemas.

Nota: los problemas marcados con una (o más) estrellas son más difíciles y son opcionales.

1. Encontrar una ecuación de la forma $Ax + By + C = 0$ para la recta que pasa por
   (a) $(2, 0)$ y $(0, 8)$
   (b) $(-1, 0)$ y $(0, -1)$
   (c) $(0, 0)$ y (a, b)
2. Para cada par de las 3 rectas del problema anterior (hay 3 tales pares) encontrar su punto de intersección (a menos que sean paralelas).
3. Dos ecuaciones $A_1x + B_1y + C_1 = 0$, $A_2x + B_2y + C_2 = 0$, describen la misma recta ssi existe una $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \neq 0$, tal que $A_2 = \lambda A_1$, $B_2 = \lambda B_1$, $C_2 = \lambda C_1$.
4. Dos rectas son paralelas ssi estan dadas por un par de ecuaciones de la forma $Ax + By + C_1 = 0$, $Ax + By + C_2 = 0$, $C_1 \neq C_2$
5. Dada una recta l y un punto $P \notin l$, existe una única recta l' que pasa por P y es paralela a l.
6. Encontrar una ecuación de la forma $Ax + By + C = 0$ para la recta que pasa por el punto $(-1, -1)$ y es paralela a la recta $x + y + 1 = 0$.
7. Sea $l_0 = \{(x, 0) \mid x \in \mathbb{R}\}$, $S^1 = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 1\}$, $P_0 = (0, 1)$ y $P \in S^1$, $P \neq P_0$. Demuestra que la recta que pasa por P, P_0 intersecta a l_0 en un solo punto.
8. Dados tres puntos distintos $P_1 = (x_1, y_1)$, $P_2 = (x_2, y_2)$, $P_3 = (x_3, y_3)$, existe una recta que pasa por los 3 puntos ssi $(y_3 - y_1)(x_2 - x_1) = (y_2 - y_1)(x_3 - x_1)$.

   Sugerencia: esta ecuación se obtiene al pedir que la recta que pasa por P_1, P_2 pase también por P_3.
9. * Encontrar una interpretación geométrica de la cantidad
   $$f(P_1, P_2, P_3) = |(y_3 - y_1)(x_2 - x_1) - (y_2 - y_1)(x_3 - x_1)|$$
   que apareció en el problema anterior.
10. * Para cada $n = 2, 3, \ldots$ encuentra el máximo número de puntos de intersección a_n que n rectas en el plano pueden tener. Por ejemplo, $a_2 = 1$, $a_3 = 3$, $a_4 = 6$.
11. ** Está dado un conjunto finito de puntos en $\mathbb{R}^2$ con la siguiente propiedad: para cada dos puntos del conjunto, la recta que pasa por ellos pasa por un tercer punto del conjunto. Demuestra que todos los puntos del conjunto están sobre una sola recta.