Tarea núm. 7 – soluciones

1. Demuestra las siguientes propiedades del producto escalar, norma, y distancia:
   a) $\langle \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3 \rangle = \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_3 \rangle + \langle \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3 \rangle$, para todo $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3 \in \mathbb{R}^2$.
   b) $\langle \lambda \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle = \lambda \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle$, para todo $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in \mathbb{R}^2$, $\lambda \in \mathbb{R}$.
   c) $\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle = \langle \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_1 \rangle$, para todo $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in \mathbb{R}^2$.
   d) Si $\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle = 0$ para todo $\mathbf{v}_2 \in \mathbb{R}^2$ entonces $\mathbf{v}_1 = 0$.
   e) $\|\mathbf{v}\| \geq 0$ con igualdad ssi $\mathbf{v} = 0$.
   f) $\|\lambda \mathbf{v}\| = |\lambda| \|\mathbf{v}\|$ para todo $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$, $\lambda \in \mathbb{R}$.
   g) $\|\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2\| \leq \|\mathbf{v}_1\| + \|\mathbf{v}_2\|$ para todo $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in \mathbb{R}^2$. (Sugerencia: usar la desigualdad de Cauchy-Schwartz.)
   h) $dist(P_1, P_2) \geq 0$ para todo $P_1, P_2 \in \mathbb{R}^2$, con igualdad ssi $P_1 = P_2$.
   i) $dist(P_1, P_2) = dist(P_2, P_1)$ para todo $P_1, P_2 \in \mathbb{R}^2$.
   j) $dist(P_1, P_3) \leq dist(P_1, P_2) + dist(P_2, P_3)$ para todo $P_1, P_2, P_3 \in \mathbb{R}^2$.

   ▷ La mayoría es muy fácil. Aquí está la demostración de (g):

$$\begin{aligned} \|\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2\|^2 &= \|\mathbf{v}_1\|^2 + \|\mathbf{v}_2\|^2 + 2\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle \\ &\leq \|\mathbf{v}_1\|^2 + \|\mathbf{v}_2\|^2 + 2\|\mathbf{v}_1\|\|\mathbf{v}_2\| \quad \text{(usando la desigualdad de Cauchy-Schwartz)} \\ &= (\|\mathbf{v}_1\| + \|\mathbf{v}_2\|)^2 \\ \implies \|\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2\| &\leq \|\mathbf{v}_1\| + \|\mathbf{v}_2\|. \end{aligned}$$

□

2. Sean $P_1, P_2 \in \mathbb{R}^2$ dos puntos distintos.
   a) Demuestra que $P := (P_1 + P_2)/2$ es el "punto medio" entre P_1 y P_2; es decir, P es el único punto en $\mathbb{R}^2$ tal que (1) se encuentra sobre la recta que pasa por P_1 y P_2, y (2) $dist(P, P_1) = dist(P, P_2)$.
   b) Demuestra que un punto P está sobre la recta que pasa por P_1 y P_2 ssi es de la forma $P = t_1 P_1 + t_2 P_2$, con $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ tal que $t_1 + t_2 = 1$.

   ▷ Primero demostramos el inciso (b). Sea $Ax + By + C = 0$ una ecuación para la recta l que pasa por P_1, P_2, con $P_1 = (x_1, y_1)$, $P_2 = (x_2, y_2)$. Suponemos que $t_1 + t_2 = 1$ y demostramos que $P = t_1 P_1 + t_2 P_2 \in l$ tambien. Como $P_1, P_2 \in l$ entonces $Ax_i + By_i + C = 0$, $i = 1, 2$. Multiplicamos la primera ecuación por t_1, la segunda por t_2 y sumamos. Se obtiene $A(t_1 x_1 + t_2 x_2) + B(t_1 y_1 + t_2 y_2) + C = 0$, por lo que $P \in l$.

   Ahora suponemos que $P = (x, y) \in l$ y demostraremos que existen $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$, $t_1 + t_2 = 1$, tal que $P = t_1 P_1 + t_2 P_2$. Usando el inciso 3a (ver abajo) existe un λ tal que $P - P_1 = \lambda(P_2 - P_1)$. Así que $P = (1 - \lambda)P_1 + \lambda P_2$. Podemos tomar entonces $t_1 = 1 - \lambda$, $t_2 = \lambda$.

   Ahora demostramos el inciso (a). El punto $P = (P_1 + P_2)/2$ está sobre la recta que pasa por P_1, P_2 ya que es un caso especial de inciso (b), para $t_1 = t_2 = 1/2$. Esto demuestra la parte (1). Para la parte (2), calculamos $dist(P, P_1) = dist((P_1 + P_2)/2, P_1) = \|(P_1 + P_2)/2 - P_1\| = \|(P_2 - P_1)/2\| = \|P_2 - P_1\|/2 = dist(P_1, P_2)/2$, y tambien $dist(P, P_2) = dist((P_1 + P_2)/2, P_2) = \|(P_1 + P_2)/2 - P_2\| = \|(P_1 - P_1)/2\| = \|P_2 - P_1\|/2 = dist(P_1, P_2)/2$, por lo que $dist(P, P_1) = dist(P, P_2)$.

   Para la unicidad, suponemos que $Q \in l$ tambien satisface $dist(Q, P_1) = dist(Q, P_2)$ y demostraremos que $Q = ((P_1 + P_2)/2$. Usando la parte (b) del problema, existe un $t \in \mathbb{R}$ tal que $Q = tP_1 + (1 - t)P_2$. Entonces $dist(Q, P_1) = \|tP_1 + (1-t)P_2 - P_1\| = |1 - t| dist(P_1, P_2)$ y $dist(Q, P_2) = \|tP_1 + (1-t)P_2 - P_2\| = |t| dist(P_1, P_2) \implies |1 - t| = |t| \implies 1 - t = \pm t \implies 1 - t = t$ (ya que la opción $1 - t = -t$ implica $1 = 0$) $\implies t = 1/2 \implies Q = P_1/2 + P_2/2 = P$. □

3. Sea $l \in \mathbb{R}^2$ una recta.
   a) Demuestra que existe un vector $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$ tal que para todo $P_1, P_2 \in l$ existe un $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $P_1 - P_2 = \lambda \mathbf{v}$. Además, $\mathbf{v}$ es "único", en el siguiente sentido: si $\mathbf{v}' \in \mathbb{R}^2$ es otro tal vector (o sea para todo $P_1, P_2 \in l$ existe un $\lambda' \in \mathbb{R}$ tal que $P_1 - P_2 = \lambda' \mathbf{v}'$) entonces $\mathbf{v}' = c\mathbf{v}$ para algun $c \in \mathbb{R}$, $c \neq 0$.

▷ Sea l_0 el conjunto de todas las diferencias de puntos en l, o sea $l_0 = \{P_1 - P_2 \mid P_1, P_2 \in l\}$. Veremos que (1) l_0 es una recta, paralela a l, que pasa por el origen, y (2) toda recta l_0 que pasa por el origen está "generada" por cualquer elemento no nulo; o sea, si fijamos un elemento no nulo $\mathbf{v}_0 \in l_0$, entonces $l_0 = \{\lambda v_0 | \lambda \in \mathbb{R}\}$.

(1) Sea $Ax + By + C = 0$ una ecuación para l y $P_1, P_2 \in l$, con $P_i = (x_i, y_i)$. Tenemos entonces que $Ax_i + By_i + C_i = 0$, $i = 1, 2$. Restando estas dos ecuaciones se obtiene $A(x_1 - x_2) + B(y_1 - y_2) = 0$. O sea, las coordenadas de $P_1 - P_2$ satisfacen la ecuación $Ax + By = 0$, lo cual es la ecuación de una recta, paralela a l, que pasa por el origen.

Por otro lado, si (x, y) satiface $Ax + By = 0$, y $P_1 = (x_1, y_1)$ es cualquer punto en l, entonces $Ax_1 + By_1 + C_1 = 0$, y sumando esto con $Ax + By = 0$ se obtiene $A(x + x_1) - B(y + y_0) + C = 0$. Así que si definimos $P_2 = (x_2, y_2)$ por $x_2 = x + x_1$, $y_2 = y + y_1$ se tiene que $P_2 \in l$ y $P_1 - P_2 = (x, y)$.

Hemos demostrado entonces en los últimos dos párafos que l_0 es el conjunto de soluciones de $Ax + By = 0$.

(2) Sea ahora l_0 una recta que pasa por el origen, con ecuación $Ax + By = 0$, y sea $v_0 = (x_0, y_0)$ un elemento no nulo de l_0, o sea $Ax_0 + By_0 = 0$. Multiplicando esta ecuación por un $\lambda \in \mathbb{R}$ se tiene que $A(\lambda x_0) + B(\lambda y_0) = 0$, así que $\lambda v_0 \in l_0$. Ahora vemos que de este modo se obtienen todos los elementos de l_0. Sea $v = (x, y) \in l$, o sea $Ax + By = 0$. Como $P_0 \neq (0, 0)$, se tiene que $x_0 \neq 0$ o $y_0 \neq 0$. Si $x_0 \neq 0$, entonces $Ax_0 + By_0 = 0 \implies A = -By_0/x_0 \implies B \neq 0$ (de otro modo tendriamos de la última ecuación que tambien $A = 0$) $\implies y = -Ax/B = -(-By_0/x_0)x/B = (x/x_0)y_0$, así que $\mathbf{v} = \lambda \mathbf{v}_0$ con $\lambda = x/x_0$. Si $y_0 \neq 0$ tenemos un argumento similar con $\lambda = y/y_0$.

Así que hemos demostrado que $l_0 = \{\lambda v_0 \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$.

En conclusión, hemos demostrado en (1) y (2), que si tomamos como $\mathbf{v}$ la diferencia de cualquer par de puntos distinos en l, entonces la diferencia de cualquer otro par de puntos en l es un múltiplo de $\mathbf{v}$. □

b) Si l está dado por la ecuación $Ax + By + C = 0$, y si definimos $N = (A, B)$ entonces $(\mathbf{v}, N) = 0$.

▷ En la demostración del inciso anterior vimos que $\mathbf{v}$ es la diferencia de cualquer par de puntos distintos en l y sus coordenadas satifacen la ecuación $Ax + By = 0$, o sea $(\mathbf{v}, N) = 0$. □

c) Para todo $Q \in \mathbb{R}^2$ existe un único punto $Q^* \in l$ tal que para todo $P \in l$, $dist(Q, P) \geq dist(Q, Q^*)$, con igualdad ssi $P = Q^*$.

▷ Sean $P_0, P_1 \in l$ dos puntos distintos en l. En el problema anterior vimos que todo punto $P \in l$ es de la forma $P_t = (1 - t)P_0 + tP_1$ para algun $t \in \mathbb{R}$. Sea $f(t) = \|P_t - Q\|^2$. Como $f(t)$ es el cuadrado de la distancia entre P_t y Q, se minimiza para los mismos puntos que se minimiza la distancia. Ahora calculamos que $f(t) = \|(1 - t)P_0 + tP_1 - Q\|^2 = \|\mathbf{w} + t\mathbf{v}\|^2$, con $\mathbf{w} = P_0 - Q$, $\mathbf{v} = P_1 - P_0$, así que $f(t) = \|\mathbf{v}\|^2 t^2 + 2\langle \mathbf{v}, \mathbf{w}\rangle t + \|\mathbf{w}\|^2$. Esta es una función cuadrática, de la forma $at^2 + bt + c$, con $a = \|\mathbf{v}\|^2 > 0$, $b = 2\langle \mathbf{v}, \mathbf{w}\rangle$, $c = \|\mathbf{w}\|^2$, por lo que su mínimo (único) ocurre para $t^* = -b/2a = -\langle \mathbf{v}, \mathbf{w}\rangle/\|\mathbf{v}\|^2$, lo cual corresponde a $Q^* = \mathbf{w} + t^*\mathbf{v} = \mathbf{w} - \langle \mathbf{v}, \mathbf{w}\rangle \mathbf{v}/\|\mathbf{v}\|^2$. □
Nota: Más tarde tendremos un interpretación geométrica bonita para Q^*.

4. Demuestra: los 3 medianos de un triángulo pasan por un solo punto, que divide a cada mediano en la proporción 2:1. Es decir: dados 3 puntos distintos P_1, P_2, P_3 no colineales (=no están sobre la misma recta), sean $Q_1 = (P_2 + P_3)/2$, $Q_2 = (P_1 + P_3)/2$, $Q_3 = (P_1 + P_2)/2$, y l_i la recta que pasa por P_i y Q_i, $i = 1, 2, 3$. Entonces l_1, l_2, l_3 pasan por un solo punto P_0. Además, $dist(P_i, P_0) = 2dist(P_0, Q_i)$, $i = 1, 2, 3$.

▷ Sea $P_0 = (P_1 + P_2 + P_3)/3$. Entonces $P_0 = (1/3)P_1 + (2/3)[(P_2 + P_3)/2] = (1/3)P_1 + (2/3)Q_1$ lo cual demuestra que $P_0 \in l_3$ (ver problema 2b). De manera similar se demuestra que $P_0 \in l_2, l_3$, así que P_0 está en la intersección de l_1, l_2, l_3.

Es el único punto de intersección de estas 3 rectas, ya que si hubiera un punto distinto en la intersección, las 3 rectas hubieran coincidido (porque por cualquer 2 puntos distintos pasa una *única* recta), lo cual implicaría que los 3 puntos P_1, P_2, P_3 son colineales.

El punto P_0 divide la distancia enttre Q_i y P_i en la razon $2:1$ ya que para $i = 1, 2, 3$,

$$\begin{aligned} dist(P_0, Q_i) &= \|P_0 - Q_i\| = \|[(1/3)P_i + (2/3)Q_i] - Q_i\| = \|(1/3)(P_i - Q_i)\| = \\ &= (1/3)dist(P_i - Q_i), \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} dist(P_0, P_i) &= \|P_0 - P_i\| = \|[(1/3)P_i + (2/3)Q_i] - P_i\| = \|(2/3)(Q_i - P_i)\| = \\ &= (2/3)dist(P_i - Q_i). \end{aligned}$$

□

5. * (opcional) Demuestra que en la desigualdad del triángulo, $dist(P_1, P_3) \leq dist(P_1, P_2) + dist(P_2, P_3)$, tenemos igualdad ssi existe un $t \in \mathbb{R}$, $0 \leq t \leq 1$, tal que $P_2 = tP_1 + (1-t)P_3$.

   ▹ Si $P_2 = tP_1 + (1-t)P_3$ para $t \in [0, 1]$ entonces $t, 1-t \geq 0 \implies dist(P_1, P_2) + dist(P_2, P_3) = \|P_1 - [tP_1 + (1-t)P_3]\| + \|[tP_1 + (1-t)P_3] - P_3\| = \|(1-t)(P_1 - P_3)\| + \|t(P_1 - P_3)\| = (|1-t| + |t|)\|P_1 - P_3\| = \|P_1 - P_3\| = dist(P_1, P_3)$.

   Suponemos ahora que $dist(P_1, P_3) = dist(P_1, P_2) + dist(P_2, P_3)$. Si $P_1 = P_2$ tenemos $P_2 = tP_1 + (1-t)P_3$ con $t = 1$ y si $P_2 = P_3$ lo tenemos con $t = 0$. De otro modo, los vectores $\mathbf{v}_1 := P_1 - P_2$ y $\mathbf{v}_2 := P_2 - P_3$ no son nulos y satifacen $\|\mathbf{v}_1\| + \|\mathbf{v}_2\| = \|\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2\|$. Tomando el caudrado de ambos lados tenemos $\|\mathbf{v}_1\|^2 + \|\mathbf{v}_2\|^2 + 2\|\mathbf{v}_1\|\|\mathbf{v}_2\| = \|\mathbf{v}_1\|^2 + \|\mathbf{v}_2\|^2 + 2\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle \implies \|\mathbf{v}_1\|\|\mathbf{v}_2\| = \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle \implies$ existe un $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $\mathbf{v}_2 = \lambda \mathbf{v}_1$ (caso de igualdad en la desigualdad de Cauchy Schwartz). Sustituyendo en $\|\mathbf{v}_1\|\|\mathbf{v}_2\| = \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle$ tenemos que $\lambda = |\lambda|$ por lo que $\lambda \geq 0$. Sea $t = \lambda/(1+\lambda)$. Entocnes $0 < t < 1$ y $t(P_1 - P_3) = t[(P_1 - P_2) + (P_2 - P_3)] = t(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) = t(\mathbf{v}_1 + \lambda \mathbf{v}_1) = t(1+\lambda)\mathbf{v}_1 = \lambda \mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_2 = P_2 - P_3 \implies P_2 = P_3 + t(P_1 - P_3) = tP_1 + (1-t)P_3$. □