Tarea núm. 9

(Para el viernes 10 oct 2008)

Definiciones

- Sean $P_1, P_2 \in \mathbb{R}^2$. El *segmento* con extremos P_1, P_2 es el conjunto $\overline{P_1P_2} = \{(1-t)P_1 + tP_2 \mid 0 \leq t \leq 1\}$ (ver ejercicio 2b de la tarea 7). La longitud del segmento es la distancia entre sus extremos.
- Un *círculo* en $\mathbb{R}^2$, con centro $P_0 \in \mathbb{R}^2$ y radio $R > 0$, es el conjunto de puntos $S = \{P \in \mathbb{R}^2 \mid dist(P, P_0) = R\}$. El *interior* de S es el conjunto $\{P \in \mathbb{R}^2 \mid dist(P, P_0) < R\}$ y el *exterior* de S es el conjunto $\{P \in \mathbb{R}^2 \mid dist(P, P_0) > R\}$. Una recta, u otro círculo, es *tangente* a S si su intersección con S es un solo punto. Una *cuerda* de S es un segmento $\overline{P_1P_2}$ tal que $P_1, P_2 \in S$. Una cuerda de S es un *diámetro* si pasa por el centro.

Algunas proposiciones vistas en clase

- El centro de un círculo es el punto medio de cualquera de sus diámetros.
- Toda cuerda de un círculo de radio R es de longitud $\leq 2R$, con igualdad ssi la cuerda es un diámetro.
- Si $\overline{P_1P_2}$ es un diámetro de un círculo S y $P_3 \in S$ es cualquer punto distinto de P_1, P_2 entonces $P_2 - P_3$ es perpendicular a $P_1 - P_3$ (así que el triángulo con vértices P_1, P_2, P_3 es rectángulo).
- Si l es una recta tangente a un círculo S en P_1 (o sea $l \cap S = \{P_1\}$), entonces l es perpendicular a $\overline{P_1P_0}$.
- Dados 3 puntos distintos y no colineales en $\mathbb{R}^2$, existe un único círculo que pasa estos puntos.

Problemas

1. Dos círculos, o una línea y un círculo, se intersectan en 0, 1 ó 2 puntos.
2. Por un punto en el exterior de un círculo pasan exactamente dos líneas tangentes al círculo.
3. Un cuadrángulo es cocíclico (=existe un círculo que pasa por sus vértices) ssi sus ángulos opuestos suman 180^0.
4. Dada una cuerda $\overline{P_1P_2}$ de un círculo S y un punto P sobre el arco mayor de S con extremos P_1, P_2, el ángulo $P_1P_0P_2$ es dos veces el ángulo P_1PP_2. En particular, el ángulo P_1PP_2 no depende del punto P, solo de la cuerda $\overline{P_1P_2}$.
5. Dos círculos con radios r_1, r_2 son tangentes ssi la distancia entre sus centros es $r_1 + r_2$ ó $|r_1 - r_2|$.
6. Sea S el círculo que pasa por $P_1 = (-1, 0)$, $P_2 = (0, -2)$, $P_3 = (1, 1)$. En cada inciso hay que calcular lo indicado y acompañarlo con un dibujo claro.
   a) El centro y el radio de S.
   b) La tangente a S en P_1.
   c) Los puntos de intersección de S con los ejes de x y y.
   d) El punto $P_1' \in S$ tal que $\overline{P_1P_1'}$ es un diámetro de S.
   e) Las tangentes a S que son paralelas a los ejes de x y y.
   f) Las tangentes a S que pasan por $(2, 2)$.
   g) Los círculos en $\mathbb{R}^2$ que son tangentes a S y a los ejes de x y y.
   Sugerencia: usar el problema anterior.
7. * Sea S un círculo en $\mathbb{R}^2$ con centro P_0 y radio R, y sea P un punto en el exterior de S a una distancia d de P_0.
   a) Sea l una recta que pasa por P y tangente a S en un punto P_1. Sea $k = dist(P, P_1)$. Entonces $k^2 = d^2 - R^2$.
   b) Sea l una recta que pasa por P e intersecta a S en dos puntos P_1, P_2. Sean $k_i = dist(P, P_i)$, $i = 1, 2$. Entonces $k_1k_2 = d^2 - R^2$. En particular, el producto k_1k_2 no depende de l, solo de P y S.
   c) Formula y demuestra los análogos de los últimos dos incisos para un punto P en el interior de S.

   Definición: $d^2 - R^2$ es la *potencia* de P con respecto a S.

   d) Sea S' un círculo que intersecta a S en dos puntos P_1, P_2. Entonces la recta que pasa por P_1, P_2 (la tangente en caso de $P_1 = P_2$) es el conjunto de los puntos en el plano que tiene las misma potencias con respecto a S y S'.