Notas núm. 1

Definición. Una representación (lineal) de un grupo G en un espacio vectorial V es un homomorfismo de grupos $\rho : G \to GL(V)$, donde $GL(V)$ es el grupo de transformaciones lineales invertibles $V \to V$. La representación es de dimensión finita (compleja, real, etc.) si V es de dimensión finita (complejo, real, etc.).

Definición. Dos representaciones (ρ_1, V_1), (ρ_2, V_2) de un grupo G son equivalentes, $\rho_1 \sim \rho_2$, si existe un isomorfismo lineal $T : V_1 \to V_2$ tal que $\rho_2(g) \circ T = T \circ \rho_2(g)$ para todo $g \in G$.

Ejemplo. Sea $G = \mathbb{Z}_N$, $\omega = e^{2\pi i/N}$, $\rho_l : G \to \mathbb{C}^* = GL(\mathbb{C})$, dada por $\rho_l([k]) = \omega^{kl}$, $0 \le k, l \le N-1$. Son N representaciones complejas distintas de dimensión 1, no equivalentes.

$\to$**1.1.** Toda representación lineal compleja de dimensión 1 de $\mathbb{Z}_N$ es equivalente a una de las ρ_l, $0 \le l < N$.

Definición. Dada una representación (ρ, V) de un grupo G la representación dual (ρ^*, V^*) está dada por $\rho^*(g) := [\rho(g^{-1})]^*$.

$\to$**1.2.** Para $G = \mathbb{Z}_N$, demuestra que $(\rho_l)^* \sim \rho_{N-l}$.

Definición. La suma directa de dos representaciones (ρ_1, V_1), (ρ_2, V_2) es la representación $(\rho_1 \oplus \rho_2, V_1 \oplus V_2)$, dada por $(\rho_1 \oplus \rho_2)(g) := \rho_1(g) \oplus \rho_2(g)$.

$\to$**1.3.** Toda representación lineal compleja de dimensión finita de $G = \mathbb{Z}_N$ es equivalente a una suma directa de las ρ_l's.

$\to$**1.4.** Se define una representación de $\mathbb{Z}_3$ en $\mathbb{C}^3$ por $\rho([1])(z_1, z_2, z_3) = (z_2, z_3, z_1)$. Descomponer esta representación en la suma directa de 3 reprsentaciones de dimesnion 1.

Definición. El producto tensorial de dos representaciones (ρ_1, V_1), (ρ_2, V_2) es la representación $(\rho_1 \otimes \rho_2, V_1 \otimes V_2)$, dada por $(\rho_1 \otimes \rho_2)(g) := \rho_1(g) \otimes \rho_2(g)$.

$\to$**1.5.** Para $G = \mathbb{Z}_N$, demuestra que $\rho_l = \rho_1 \otimes \ldots \otimes \rho_1$ (l veces).

$\to$**1.6.** Sean (ρ_1, V_1), (ρ_2, V_2) dos representaciones de un grupo G. Se define $Hom(V_1, V_2)$ como el espacio de todas transformaciones lineales entre V_1 y V_2 con $\rho : G \to GL(Hom(V_1, V_2))$ dado por $\rho(g)T = \rho_2(g) \circ T \circ \rho_1(g^{-1})$. Demuestra que $(\rho, Hom(V_1, V_2))$ es una representación y que es equivalente a $(\rho_2 \otimes \rho_1^*, V_2 \otimes V_1^*)$.

Definición. Una representación (ρ, V) de un grupo G es irreducible si los únicos subespacios de V invariantes bajo G son todo V y el subespacio nulo.

Ejemplo. Toda representación de dimensión uno es irreducible.

$\to$**1.7.** La representación "obvia" de $GL_n(\mathbb{C})$ en $\mathbb{C}^n$, $\rho(g) = g$, es irreducible.

El lema de Schur. Si (ρ, V) es una representación compleja irreducible y $T : V \to V$ es una transformación lineal G-equivariante, i.e. $T \circ \rho(g) = \rho(g) \circ T$ para todo $g \in G$, entonces T es un múltiplo de la identitad, $T = \lambda I$, $\lambda \in \mathbb{C}$.

Demostración: Sea λ un valor propio de T. Entonces $W := Ker(T - \lambda I) \neq \{0\}$ y es G-invariante, así que $W = V$. $\square$

Corolario. Una representación compleja irreducible de un grupo abeliano es de dimensión 1.

Demostración: Para todo $g \in G$, $\rho(g)$ es G-equivariante, así que un múltiplo de la identidad. Así que todo subespacio de V es G-invariante, por lo que V debe ser 1 dimensional. $\square$

→**1.8.** Sean (ρ_1, V_1), (ρ_2, V_2) dos representaciones irreducibles complejas y $T : V_1 \to V_2$ una transformación lineal G-equivariante. Si V_1 y V_2 son equivalentes, o sea existe un isomorfismo G-equivariante $T_0 : V_1 \to V_2$, entonces $T = \lambda T_0$, $\lambda \in \mathbb{C}$. Si V_1 y V_2 no son equivalentes entonces $T = 0$.

→**1.9.** Cierto o Falso: el producto tensorial de dos representaciones irreducibles es irreducible.

→**1.10.** Encontrar un ejemplo de una representación que no es irreducible pero que no es la suma directa de irreducibles.

→**1.11.** La representación dual a una representación irreducible es irreducible.

→**1.12.** Sea V una representación compleja de un grupo. Demuestra que la representación $V \oplus \ldots \oplus V$ (k veces) es isomorfa a la representación $V \otimes \mathbb{C}^k$, donde $\mathbb{C}^k$ es la repersentación trivial.

→**1.13.** Para una representación V de un grupo G se denota por $\mathrm{End}_G(V)$ el espacio de los endomorfismos $V \to V$ que conmutan con G. Así que el lema de Schur afirma que si V es irreducible compleja, $\mathrm{End}_G(V) = \mathbb{C}I_V$ (múltiplos complejos del endomorfismo identidad de V). Demuestra la siguiente generalización del lema de Schur: si V es la suma directa de representaciones irreducibles $V_1, \ldots, V_k$, donde V_i aparece con multiplicidad m_i, o sea $V = \oplus_i m_i V_i = \oplus_i [V_i \otimes \mathbb{C}^{m_i}]$, y donde los V_i's son irreducibles distintos (i.e. no equivalentes entre sí), entonces $\mathrm{End}_G(V) = \oplus_i [I_{V_i} \otimes \mathrm{End}(\mathbb{C}^{m_i})]$.

→**1.14.** Se toma un polígono con N vértices y se asigna un número real a cada vértice. Luego se define una nueva asignación de números a los vértices del polígono al sustituir cada número por el promedio de sus dos vecinos. Estudia el comportamiento de este proceso al iterarlo muchas veces. (Sugerencia: los casos de N par e impar son distintos).

Definición. Una representación compleja (ρ, V) de un grupo G es **unitaria** si existe en V un producto hermitiano G-invariante. O sea, existe una función $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{C}$, lineal en la primera entrada, anti-lineal en la segunda, simétrica conjugada, positiva definida, y tal que $\langle \rho(g)v_1, \rho(g)v_2 \rangle = \langle v_1, v_2 \rangle$ para todo $g \in G$.

Proposición. Toda representación unitaria de dimensión finita es completamente reducible, i.e. es la suma directa de representaciones irreducibles.

Demostración: Por inducción sobre la dimensión de la representación. Si $W \subset V$ es un subespacio invariante, entonces su complemento ortogonal tambien lo es. $\square$

Teorema. Toda representación de dimensión finita de un grupo finito es unitaria.

Demostración: Sea $\langle \cdot, \cdot \rangle_0$ cualquer producto hermitiano en V y verifique que $\langle v_1 \cdot, v_2 \cdot \rangle = (1/\#G) \sum_{g \in G} \langle \rho(g)v_1, \rho(g)v_2 \rangle$ es un producto hermitiano G-invariante. $\square$

Corolario. Toda representación de dimensión finita de un grupo finito es la suma directa de representaciones irreducibles.

Corolario. Toda representación compleja de dimensión finita de un grupo finito abeliano es la suma directa de representaciones unidimensionales (ver ejr. 1.3).

Definición. Sea G un grupo finito. La **álgebra de grupo** de G es el espacio vectorial $\mathbb{C}[G]$ de todas las funciones complejas $G \to \mathbb{C}$. Se define en $\mathbb{C}[G]$ dos representaciones de G: la

representación regular izquierda $(\rho_L, \mathbb{C}[G])$ está dada por $(\rho_L(g)f)(x) = f(g^{-1}x)$. La **representación regular derecha** $(\rho_R, \mathbb{C}[G])$ está dada por $(\rho_R(g)f)(x) = f(xg)$. Se define en $\mathbb{C}[G]$ el producto hermitiano $\langle f_1, f_2 \rangle = (1/\#G) \sum_{g \in G} f_1(g) \overline{f_2(g)}$.

<u>**Proposición**</u>. El producto hermitiano en $\mathbb{C}[G]$ es bi-invarinate, i.e. invariante por las representaciones izquierda y derecha.

(Actualizado 11 de feb, 2008).