Notas núm. 2

NOTA: todas las representaciones son de dimesnión finita.

Definición. Sea (ρ, V) una representación compleja de un grupo G. El **caracter** de la representación es la función $\chi_\rho : G \to \mathbb{C}$ dada por $\chi_\rho(g) = \mathrm{tr}[\rho(g)]$, donde $\mathrm{tr} : \mathrm{End}(V) \to \mathbb{C}$ es la traza (suma de las entradas del diagonal de la matriz que represnta a un operador lineal con respecto a una base de V).

→**2.1.** Demostrar:

- $\chi_\rho(e) = \dim V$.
- Si $g_1, g_2 \in G$ son elementos conjugados ($g_2 = hg_1h^{-1}$ para algun $h \in G$), entonces $\chi_\rho(g_1) = \chi_\rho(g_2)$.
- Los caracteres de representaciones equivalentes coinciden.
- $\chi_{\rho_1 \oplus \rho_2} = \chi_{\rho_1} + \chi_{\rho_2}$.
- $\chi_{\rho_1 \otimes \rho_2} = \chi_{\rho_1}\chi_{\rho_2}$.
- $\chi_{\rho^*}(g) = \chi_\rho(g^{-1})$.
- Si $H \subset G$ es un subgrupo, $\rho' = \rho|_H$, entonces $\chi_{\rho'} = \chi_\rho|_H$.

Nota: El converso de la tercera propiedad no es cierto. Por ejemplo, La representación de $\mathbb{Z}$ en $\mathbb{C}^2$ dada por

$$\rho(n) = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

tiene el mismo caracter que la representación trivial. Sin embargo, veremos más tarde que para grupos *finitos* es cierto.

Definición. Sea V un espacio vectorial complejo. El espacio vectorial conjugado $\overline{V}$ es el mismo conjunto de vectores pero la multiplicación por escalar cambia: la nueva multiplicación por un escalar $\lambda \in \mathbb{C}$ es la antigua multiplicación por el escalar $\bar{\lambda}$. Si $T : V \to W$ es una transformación lineal, entonces se denota por $\overline{T} : \overline{V} \to \overline{W}$ la *misma* función (y se verifique que sigue siendo lineal como transformación lineal $\overline{V} \to \overline{W}$.) Si (ρ, V) es una representación compleja se denota por $(\overline{\rho}, \overline{V})$ la representación $\overline{\rho}(g) = \overline{\rho(g)}$.

OJO: toma un poco de tiempo acostumbrarse a esta definición. . .

→**2.2.** Una base para V es también una base para $\overline{V}$. Si A es la matriz de una $T \in \mathrm{End}(V)$ con respecto a esta base entonces la matriz de $\overline{T}$, con respecto a la misma base, es $\overline{A}$ (conjugando las entradas de la matriz A).

→**2.3.** $\chi_{\overline{\rho}} = \overline{\chi_\rho}$.

→**2.4.** Una representación unitaria satisface $\overline{\rho} \sim \rho^*$. (Reto: estudiar el converso).
Sugerencia: el isomorfismo está dado por $v \mapsto \langle v, \cdot \rangle$.

Definición. Sea X un conjunto y G un grupo.

- Una **acción** de G en X es un homomorfismo ϕ entre G y el grupo de biyecciones $X \to X$. O sea, para cada $g \in G$, $\phi(g) : X \to X$ es una biyección, $\phi(e)$ es la identidad de X y $\phi(g_1g_2) = \phi(g_1) \circ \phi(g_2)$. Se dice que G "actua en X" o que X es un G-espacio.

- A veces se escribe la acción simplemente gx, o $g \cdot x$, en lugar de $\phi(g)(x)$, así que la regla $\phi(g_1 g_2) = \phi(g_1) \circ \phi(g_2)$ es la "asociatividad" $(g_1 g_2)x = g_1(g_2 x)$, y $\phi(e) = id_X$ es $ex = x$ para todo $x \in X$.
- Con una acción de G en X se asocia una representación ρ de G en $\mathbb{C}[X]$, el espacio de todas las funciones $X \to \mathbb{C}$, dada por $(\rho(g)f)(x) = f(g^{-1}x)$.

→**2.5.** Demostrar que esta es una representación. Si X es finito la dimensión de $\mathbb{C}[X]$ es finita y $\dim \mathbb{C}[X] = \#X$. Una base para $\mathbb{C}[X]$ está dada por el conjunto $\{e_x | x \in X\}$ donde $e_x(y) = 1$ si $x = y$ y $e_x(y) = 0$ si $x \neq y$.

Ejemplo. Para cada grupo G se definen dos acciones de G en G mismo: translaciones por la izquierda y por la derecha. La translación por la izquierda por g manda $x \mapsto gx$ y por la derecha manda $x \mapsto xg^{-1}$.

Ejemplo. Una representación de un grupo es un caso especial de acción, una acción *lineal*, donde X es un espacio vectorial y cada $\phi(g)$ es una transformación lineal.

Proposición. Si un grupo G actua en un conjunto finito X y $(\rho, \mathbb{C}[X])$ es la representación asociada, entonces $\chi_\rho(g)$ es el número de puntos fijos de g en X.

Más definiciones acerca de acciones. Si X es un G-espacio se dice que un subconjunto $Y \subset X$ es $G-$**invariante** si $gY \subset Y$ para todo $g \in G$. Un **punto fijo** es un punto $x \in X$ tal que $gx = x$ para todo $g \in G$. La **órbita** de un punto $x \in X$ es el subconjunto $\{gx | g \in G\} \subset X$. El **estabilizador** de un $x \in X$ es el subconjunto $\{g \in G | gx = x\}$. Se dice que la acción es **trivial** si $\phi(g) = id_X$ para todo $g \in G$. La acción es **transitiva**, o X es un espacio G-**homogeneo**, si para todo $x, y \in X$ existe un $g \in G$ tal que $gx = y$. La acción es **efectiva** si $\phi(g) = id_X$ implica $g = e$. La acción es **libre** si es transitiva y el estabilizador de cualquer punto es trivial (la subconjunto $\{e\}$). Una función $F : X \to Y$ entre dos G-espacios es G-**equivariante** si $\phi_Y \circ F = F \circ \phi_X$ para todo $g \in G$. Dos G-espacios son G-**isomorfos** (o las acciones son $G-$ equivalentes) si existe una biyección G-equivariene entre ellos.

Proposición. Sea X un G-espacio.

- El estabilizador de un punto es un subgrupo de G.
- Dos puntos en la misma órbita tienen estabilizadores conjugados (dos subgrupos $H_1, H_2 \subset G$ son conjugados si existe un $g \in G$ tal que $gH_1g^{-1} = H_2$).
- La relación "y está en la órbita de x" es una relación de equivalencia en X.
- Las órbitas son subconjuntos G-invariantes *minimales* (no contienen subconjuntos invariantes más que ellos mismos).
- Un subconjunto $Y \subset X$ es G-invariante ssi es una unión de órbitas.
- Sea $x \in X$, Gx su órbita y H su estabilizador. Sea G/H el conjunto de las H-clases laterales derechas (los subconjuntos de G de la forma gH, $g \in G$). Se define una acción de G en G/H por multiplicación a la izquierda. Entonces la fórmula $gH \mapsto gx$ define un G-isomorfismo entre G/H y Gx.

→**2.6.** Demostrar esta proposición.

→**2.7.** Para cada uno de los siguientes G-espacios hay que encontrar las órbitas, esbilizadores y puntos fijos, admás de decidir es la acción es transitiva, libre o efectiva. En caso que la acción no está especificada es la "obvia". Al dar los estabilizadores, basta dar el estabilzador de un elemento de cada órbita (obviamente se escoge un elemento que tenga un estabilzador particularmente simple).

- $X = \{1, 2, 3\}$, $G = S_3$ (el grupo de permutaciones de X).
- $X = G = S_3$, donde G actua por congugación, $g \cdot x = gxg^{-1}$.
- $X = \mathbb{R}^2$, $G = \mathrm{SO}_2$ (transformaciones lineales ortogonales de $\mathbb{R}^2$ con determinante=1).
- $X = \mathbb{R}^2$, $G = \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$.
- X = el conjunto de pares (ordenados) de vectores en $\mathbb{R}^2$, $G = \mathrm{GL}_2$ (la acción es $g(v_1, v_2) = (gv_1, gv_2)$.
- X= el conjunto de las 5 diagonales de un pentágono regular, G= el grupo de isomoterias del pentágono.
- X= el conjunto de los pares no ordenados de las 5 diagonales de un pentágono regular, G= el grupo de isomoterias del pentágono.
- $X = \mathbb{R}^n$, $G = O_n$ (transformaciones lineales ortogonales).
- X = matrices 2×2 con entradas reales, $G = \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ actuando por conjugación.
- X = matrices simétricas 2×2 con entradas reales, $G = O_2(\mathbb{R})$ actuando por conjugación.
- X = matrices simétricas 2×2 con entradas reales, $G = \mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$ actuando por conjugación.

Proposición ("las relaciones de ortogonolidad de Schur"). Sea ρ una representación irreducible compleja de un grupo finito G en un espacio vectorial V de dimensión finita, unitaria con respecto a un producto hermitiano invariante en V. Entonces

(A) Las n^2 componentes de ρ, con respecto a una base unitaria de V, satisfacen

$$\langle \rho_{ij}, \rho_{kl} \rangle = \frac{\delta_{ik}\delta_{jl}}{\dim V}.$$

(B) Si ρ' es otra representación irreducible compleja que no es equivalente a ρ, entonces todas sus componentes son ortogonales a todas las componentes de ρ.

Demostración: (idea) Para toda $T \in \mathrm{End}(V)$ se define $\langle T \rangle := \frac{1}{\#G} \sum_g \rho(g) T \rho(g^{-1})$ y se verifica que es G-equivariante. Así que, según el Lema de Schur, es un múltiplo de la identidad, $\langle T \rangle = \lambda I$. Tomando la traza de ambos lados, $\lambda = \mathrm{tr} T / \dim V$. Sea $v_1, \ldots, v_n$ una base unitaria y $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ su base dual. Sea $E_{ij} \in \mathrm{End}(V)$ dada por $E_{ij} v = v_i \alpha_j(v)$. Ahora se calcula $\langle E_{ij} \rangle$ y se usa el hecho que es un múltiplo de la identidad. Para la segunda parte se hace algo similar con $T : V_1 \to V_2$ y $\langle T \rangle := \sum_g \rho_2(g) T \rho_1(g^{-1})$. $\square$

Corolarios. Para un grupo finito G:

1. Una representación es irreducible ssi su caracter es un elemento unitario (de norma 1) en $\mathbb{C}[G]$.
2. Los caracteres de representaciones irreducibles no equivalentes son ortogonales uno al otro.
3. Dos representaciones (no necesariamente irreducibles) son equivalentes ssi sus caracteres coinciden.
4. El conjunto de caracteres de representaciones irreducibles forma un conjunto linealmente independiente en $\mathbb{C}[G]$.
5. El número de clases de equivalencias de representaciones irreducibles es finito, acotado por el número de las clases de conjugación en G.

Proposición. Sean G_1, G_2 dos grupos y X un conjunto. Existe una correspondencia 1:1 entre

- pares de acciones ϕ_1, ϕ_2 de G_1, G_2 (resp.) en X que conmutan, y
- acciones de $G_1 \times G_2$ en X.

Demostración: Con un par de acciones se asocia la acción $(g_1, g_2) \cdot x = g_1(g_2 x)$. $\square$

Definición. Dados dos grupos G_1, G_2 con representaciones (ρ_1, V_1), (ρ_2, V_2) (resp.) se define la representación $\rho_1 \boxtimes \rho_2$ ("el producto exterior de ρ_1 y ρ_2") de $G_1 \times G_2$ en $V_1 \otimes V_2$ por $(\rho_1 \boxtimes \rho_2)(g_1, g_2) = \rho_1(g_1) \otimes \rho_2(g_2)$.

Ejemplo. Sean (ρ_1, V_1), (ρ_2, V_2) dos representaciones del mismo grupo G y $\Delta : G \to G \times G$ dado por $\Delta(g) = (g, g)$. Entonces $\rho_1 \otimes \rho_2 = (\rho_1 \boxtimes \rho_2) \circ \Delta$ ("el producto tensorial interior de dos representaciones de un grupo G es la restricción de su producto tendsorial exterior al subgrupo diaganoal $\Delta(G) \subset G \times G$").

$\to$**2.8.** Dados dos conjuntos finitos X_1, X_2, $\mathbb{C}[X_1 \times X_2] \cong \mathbb{C}[X_1] \otimes \mathbb{C}[X_2]$. Si dos grupos G_1, G_2 actuan en X_1, X_2 (resp.) define una acción de $G_1 \times G_2$ en $X_1 \times X_2$ y demuestra que la representación asociada en $\mathbb{C}[X_1 \times X_2]$ es isomorfa a $\mathbb{C}[X_1] \boxtimes \mathbb{C}[X_2]$.

$\to$**2.9.** Dados dos grupos G_1, G_2 con representaciones (ρ_1, V_1), (ρ_2, V_2) (resp.) se define una representación ρ de $G_1 \times G_2$ en $\mathrm{Hom}(V_1, V_2)$ por $\rho(g_1, g_2)T = \rho_2(g_2) T \rho_1(g_1^{-1})$. Demuestra que esta representación es isomorfa a la representación $\rho_2 \boxtimes (\rho_1)^*$.

Proposición. El producto tensorial exterior de dos representaciones irreducibles de dos grupos finitos es una representación irreducible. Toda representación irreducible del producto cartesiano de los dos grupos se obtiene de esta manera.

Demostración: Para la 1era parte de calcula que la norma del caracter del producto tensorial exterior de dos representaciones es el producto de las normas de las caracteres de cada una de las representaciones. Para la segunda parte

Definición. Consideramos la acción de $G \times G$ en G por translaciones por ambos lados; i.e. $(g_1, g_2) \cdot g = g_1 g g_2^{-1}$. La representación asociada en $\mathbb{C}[G]$ se llama la **representación regular**. La restricción a $G \times \{e\}$ se llama **la representación regular izquierda** y la restricción a $\{e\} \times G$ se llama **la representación regular derecha** (ambos representaciones de G en $\mathbb{C}[G]$.

Definición. Sea $\hat{G}$ el conjunto de clases de equivalencia de representaciones irreducibles complejas de G. Para cada $\pi \in \hat{G}$ sea

- ρ_π una representación en la clase π, en un espacio vectorial V_π de dimensión d_π;
- $\mathbb{C}[G]_\pi \subset \mathbb{C}[G]$ el subespacio generado por las componentes de ρ_π (con respecto a alguna base de V_π);
- χ_π el caracter de ρ_π.

Teorema (el teorema de Peter-Weyl para grupos finitos). Sea G un grupo finito. Para cada $\pi \in \hat{G}$ el subespacio $\mathbb{C}[G]_\pi$ es un subespacio invariante irreducible de la representación regular de $G \times G$ en $\mathbb{C}[G]$, isomorfo a $\mathrm{End}(V_\pi) = V_\pi \boxtimes V_\pi^*$, y

$$\mathbb{C}[G] = \oplus_{\pi \in \hat{G}} \mathbb{C}[G]_\pi.$$

Corolario.

- $\#G = \sum_\pi d_\pi^2$.

- En las representaciones regulares izquierda y derecha de G cada V_π aparece con multiplicidad d_π (la dimensión de V_π).
- $\#\hat{G} = \#(G/conj)$ (el número de clases de conjugación de G).

Demostración: Para el 1er inciso se toma la dimensión de ambos lados del fórmula del teorema.

Para el segundo inciso se restringe la fórmula a las representaciones izquierda y derecha.

Para el 3er inciso se restringe la fórmula al subgrupo diagonal $\Delta(G)$. La acción de un $g \in G$ en G es ahora for conjugación, $x \mapsto gxg^{-1}$, y la accion en $\mathrm{End}(V_\pi)$ es por conjugación por $\rho_\pi(g)$, $T \mapsto \rho(g)T\rho(g^{-1})$. Calculamos los subespacios fijos de ambos lados de la fórmula. Las funciones en G fijas bajo conjugación son las funciones en $G/conj$ (el conjunto de clases de conjugación de G). Los endomorfismos de V_π invariantes bajo conjugación por ρ_π son los múltiplos de la identidad de V_π (lema de Schur). Tenemos entonces $\mathbb{C}[G/conj] \cong \oplus_{\pi\in\hat{G}}\mathbb{C}I_{V_\pi}$. Se toma ahora la dimensión de ambos lados. $\square$

→**2.10.** El conjunto de caracteres de representaciones irreducibles complejas de un grupo finito es una base ortonormal del espacio de las funciones en G invariantes bajo conjugación (las llamadas "funciones de clase", las funciones $f : G \to \mathbb{C}$ que satisfacen $f(x) = f(gxg^{-1})$, o simplemente $f(xy) = f(yx)$).

→**2.11.** Sea $G = S_n$ (el grupo de permutaciones de $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$) con la representación en $\mathbb{C}^n$ que permuta las coordenadas de un vector $(\rho(\sigma)(z_1, \ldots, z_n) = (z_{\sigma^{-1}1}, \ldots, z_{\sigma^{-1}n}).)$ Sea $W \subset \mathbb{C}^n$ el subespacio de vectores tal que $z_1 + \ldots + z_n = 0$. Demuestra que W es G-invariante e irreducible.

Sugerencia: basta demostrar que todo subespacio G-invariante de W contiene el vector $(1, -1, 0, \ldots, 0)$.

→**2.12.** Sea G el grupo de simetrías (=isometrias) de un cubo. Por ejemplo, el cubo con vértices $(\pm 1, \pm 1, \pm 1)$. Entonces G es un subgrupo finito del grupo de matrices ortogonales 3×3. Sea $G_0 \subset G$ el subgrupo de isometrias "propias" (con det=1, o las rotaciones).

- Demuestra que G_0 es un subgrupo de indice 2.
  Sugerencia: considera $-I \in G \setminus G_0$.
- Consideramos el conjunto X de los 4 "diagonales" del cubo (segmentos que conectan pares de vértices antípodos $(v, -v)$) con la acción obvia de G en X. Demuestra que está acción define un ismorfismo $G_0 \cong S_4$ (el grupo de todas las permutaciones de X).
  Sugerencia: demuestre que para cada par de diagonales existe una única rotacíon que intercambia estos dos diagonales y fija las otras dos.
- Concluir que $\#G_0 = 24$, $\#G = 48$.
- Descomponer en irreducibles las representaciones de G y G_0 en el espacio de las funciones complejas en el conjunto de vértices del cubo (representacion de dim=8), caras (dim=6), aristas (dim=12), pares de caras opuestas (dim=3).

Definición. Sea (ρ, W) una representación compleja de un grupo finito G. Consideramos su descomposición en irreducibles $W = W_1 \oplus \ldots$ y juntamos a todos los sumandos de la misma clase $\pi \in G$ en un subespacio W_π. Así que W_π es isomorfo a la suma directa de cierto número de copias, $m_\pi \geq 0$, de una representación irreducible $V_\pi \in \pi$. m_π se llama la **multiplicidad** de π en W y W_π se llama el subespacio **isotípico** que corresponde a π. Así que tenemos $W = \oplus_\pi W_\pi$.

$\rightarrow$**2.13.** Demuestra que la proyección de W sobre el subespacio isotípico W_π está dada por $(d_\pi/\#G)\sum_g \rho(g)\bar{\chi}_\pi(g)$.

Tablas de caracteres de grupos finitos.

Las columnas (verticales) estan etiquetadas por las representación irreducibled. Las filas (horizontales) por las clases de conjugación. Se forma un cuadrado.

(En construcción. Actualizado: 21 de feb, 2008).