Notas núm. 3

Tablas de caracteres de grupos finitos.

Las columnas (verticales) estan etiquetadas por las clases de equivalencia de representaciones irreducibles (elementos de $\hat{G}$). Las filas (horizontales) por las clases de conjugación del grupo. Se forma un "cuadrado mágico".

Ejemplo. $G = S_3$.

C	$\#C$	1	signo	$\mathbb{C}^2$	$\mathbb{C}^3$
1	1	1	1	2	3
(12)	3	1	-1	0	1
(123)	2	1	1	-1	0

Explicación.

- En la primera columna aparece una lista de las clases de conjugación del grupo (un representante de cada clase). En la segunda columna el número de elementos de cada clase. En la primera fila (entre las dos doble-líneas verticales $\|$) aparece una lista de las representaciones irreducibles: "1" es la representación trivial (en $\mathbb{C}$), "signo" es la representación de dim=1 que asigna 1 a las permutaciones pares y -1 a las impares. $\mathbb{C}^2$ es la representación irreducible de dim=2 (solo hay una). $\mathbb{C}^3$ es la representación asociada a la acción natural de S_3 en $\{1, 2, 3\}$. Esta no es irreducible pero es útil porque es fácil calcular su caracter (contando el número de puntos fijos de una permutación) y tenemos que $\mathbb{C}^3 = \mathbb{C}^2 \oplus 1$, por lo que podemos calcular el caracter de $\mathbb{C}^2$. Pero también se puede calcular el caracter de $\mathbb{C}^2$ puramente de las propiedades generales de la tabla de caracteres.
- La relación de ortogonalidad $\langle \chi_\pi, \chi_{\pi'} \rangle = \delta_{\pi\pi'}$ se traduce a
$$\frac{1}{\#G} \sum_C (\#C) \chi_\pi(C) \chi_{\pi'}(C) = \delta_{\pi\pi'}.$$
Esta es una relación de ortogonalidad entre las columnas de la tabla.
- Si multiplicamos cada entrada $\chi_\pi(C)$ de la tabla por $\sqrt{\#C/\#G}$ obtenemos una maztriz cuyas *columnas* forman una base ortonormal, o sea matriz ortogonal, así que sus *filas* forman también una base ortonormal. Esto da
$$\sum_\pi \chi_\pi(C) \chi_\pi(C') = \delta_{CC'} \frac{\#G}{\#C}.$$
Esta es una relación de ortogonalidad entre las filas de la tabla.
- De la tabla de caracteres del grupo obtenemos la estructura del **anillo de representaciones** del grupo, $R(G)$. Es el anillo generado por los elementos de $\hat{G}$ con la suma dada por suma directa y producto dado por el producto tensorial. Podemos pensar en este anillo como el subconjunto de $\mathbb{C}[G]$ que consiste en las combinaciones lineales con coeficientes enteras de los caracteres de representaciones irreducibles, con la suma y producto ordinario de funciones. Los elementos de $R(G)$ se llaman a veces **representaciones virtuales**. Las representaciones "verdaderas" de G estan incluidas en $R(G)$ como las combinaciones lineales de los elementos de $\hat{G}$ con coeficientes no-negativas.

Por ejemplo, para $G = S_3$, denotamos $\sigma =$ signo, $\lambda = \mathbb{C}^2$. Entonces tenemos de la tabla de caracteres que $R(S_3) = \{a + b\sigma + c\lambda | a, b, c \in \mathbb{Z}\}$ con el producto determinado por las relaciones, $\sigma^2 = 1, \sigma\lambda = \lambda$, $\lambda^2 = 1 + \sigma + \lambda$.

$\rightarrow$**3.1.** Descomponer λ^{10} en suma directa de irreducibles.

Sugerencia: define $M_\lambda \in \mathrm{End}(R(S_3))$ como $\rho \mapsto \lambda\rho$ y diagonaliza su matriz con respecto a la base $1, \sigma, \lambda$.

$\rightarrow$**3.2.** Descomponer la representación $S^{10}(\lambda)$ (la décima potencia simétrica de λ) en irreducibles.

Sugerencia: calculamos primero $S^2(\lambda)$. Tenemos que $\lambda^2 = S^2(\lambda) + \Lambda^2(\lambda)$. Ahora para cualquer representación ρ de dimensión d, $\Lambda^d(\rho) = det(\rho)$ (la representación unidimensional que manda $g \in G$ a $\det(\rho(g))$). Ahora demuestra que $\det(\lambda) = \sigma$ así que $S^2(\lambda) = 1 + \lambda$.

$\rightarrow$**3.3.** Sea $V = \mathbb{C}[z_1, z_2, z_3]$ (el espacio de polinomios en 3 variables con coeficientes complejas). V está equipado con una representación "obvia" de $G = S_3$, la que permuta las variables de un polinomio. El subespacio $V_d \subset V$ que consiste en polinomios homogeneos de grado d es invariante bajo G. Encontrar la descomposición de V_{10} en irreducibles.

Sugerencia: $V_d = S^d(V_1)$ y $V_1 \sim 1 + \lambda$.

Nota: "encontrar la descomposición en irreducibles" de una representación V tiene dos sentidos distintos. El primero significa encontrar subespacios invariantes irreducibles $V_i \subset V$ tal que V es la suma directa de los V_i's. El segundo es escribir a la clase de V en $R(G)$ como combinación lineal de elementos de $\hat{G}$, o sea encontrar la clase de equivalencia de cada V_i, sin encontrar los V_i's mismos. La segunda tarea es mucha más fácil que la primera, usando la tabla de caracteres del grupo y la estrucura de $R(G)$.

$\rightarrow$**3.4.** Construir la tabla de caracteres de S_4, A_4 (el subgrupo de S_4 de permutaciones pares), $\mathbb{Z}_n$, D_n (el grupo de isometrias de un polígono regular de n lados). Nota que $D_3 = S_3$. Determina la tabla de multiplicación de $R(G)$ en cada caso.

$\rightarrow$**3.5.** (Opcional) Construir la tabla de caracteres del grupo de cuaterniones $\{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}$.

(En construcción. Actualizado: 3 de marzo, 2008).