Notas núm. 4

Representaciones del grupo simétrico.

Definición. Un **álgebra** (complejo, real, etc.) asociativo con unidad es un espacio vectorial A (complejo, real, etc) con un producto asociativo, distribuitivo (con respecto a la adición de vectores) y con un elemento identidad, denotado por $e \in A$, o simplemente por 1. La **suma directa de álgebras** se define de manera obvia (se multiplica comoponente por componente).

Notamos que no pedimos comutatividad. El ejemplo básico es $\mathrm{End}(V)$, el álgebra de endomorfismos de un espacio vectorial V. Otro ejemplo es $\mathbb{C}[G]$, el álgebra del grupo de un grupo finito G.

→**4.1.** $\mathrm{End}(V)$ es conmutativo ssi $\dim V = 1$. $\mathbb{C}[G]$ es conmutativo ssi G es conmutativo.

→**4.2.** El teorema de Peter-Weyl para un grupo finito (ver notas 2) se puede interpretar como la descomposición de $\mathbb{C}[G]$ como la suma directa de los álgebras de endomorfismos de espacios vectoriales, $\mathbb{C}[G] \cong \bigoplus_\pi \mathrm{End}(V_\pi)$, donde $\pi \in \hat{G}$ (classes de equivalencias de representaciones irreducibles).

→**4.3.** (Opcional) Dar un ejemplo de un álgebra que no es la suma directa de los álgebras de endomorfismos de espacios vectoriales.

→**4.4.** Toda representación de un grupo finito $G \to GL(V)$ se extiende únicamente a un homomorfismo de álgebras $\mathbb{C}[G] \to \mathrm{End}(V)$. La imagen de esta extensión es todo $\mathrm{End}(V)$ ssi la representación es irreducible. Encuentra la imagen si $V = \oplus m_i V_i$ con cada V_i irreducible.

Definición. Sea $C \subset A$ un subconjunto de un álgebra. El conmutador (o "centralizador") de C en A es $Z(C, A) = \{b \in A | ab = ba \text{ para todo } a \in C\}$.

→**4.5.** $Z(C, A)$ es un subálgebra. Si B es el subálgebra de A generado por C entonces $Z(C, A) = Z(B, A)$. Si $A = \bigoplus_i A_i$ entonces $Z(C, A) = \bigoplus_i Z(C, A_i)$.

→**4.6.** Encuentra los conmutadores $Z(C, A)$ en los casos siguientes :

1. $A = C = \mathrm{End}(V)$.
2. $A = \mathrm{End}(\mathbb{C}^n)$, C=una matriz diagonal.
3. $A = \mathrm{End}(V_1 \oplus V_2)$, $C = \mathrm{End}(V_1)$, ie los endomorfismos de V de la forma $v = v_1 + v_2 \mapsto A_1 v_1$, con $A_1 \in \mathrm{End}(V_1)$
4. $A = \mathrm{End}(V_1 \otimes V_2)$, $C = \mathrm{End}(V_1) \otimes Id_{V_2}$.
5. $A = \mathrm{End}(V)$, donde V=el espacio de una representación de un grupo finito $\rho : G \to GL(V)$, $C = \rho(G)$.

Definición. Un **idempotente** en un álgebra es un elemento que satiface $u^2 = u$. El idempotente es **primitivo** si no es la suma de dos idempotentes, ambos no nulos.

→**4.7.** Todo idmepotente en $\mathrm{End}(V)$ es una proyección a un subespacio (paralelo a un subespacio complementario).

Proposición. Sea $A = \mathbb{C}[G]$, donde G es un grupo finito. Hay una correspondencia 1-1 entre subespacios $B \subset A$ invariantes por la izquierda (i.e. $AB \subset B$) e idempotentes $u \in A$. La correspondencia está dada por $B = Au$. La función $A \to A$ dada por $a \mapsto au$ es la proyección sobre

B paralelo a $B^\perp$ (el complemento ortogonal de B). Los idempotentes primitivos corresponden a los subespacios irreducibles.

→**4.8.** Demostrar la proposición.

Sugerencia: si $B \subset A$ es invariante por la izquierda entonces $B^\perp$ también lo es. Ahora descompone $1 = u + u^\perp$ con $u \in B$, $u^\perp \in B^\perp$ y demuestra que ambos $u, u^\perp$ son idempotentes y que $uu^\perp = u^\perp u = 0$.

→**4.9.** Demuestra que el caracter de una representación irreducible de un grupo finito es un múltiplo (por un escalar) de un idempotente en $\mathbb{C}[G]$. Decide si este idempotente es primitivo. Encuentra el subespacio invariante correspondiente de $\mathbb{C}[G]$. Encuentra la descomposición del idempotente $e \in \mathbb{C}[G]$ que corresponde a la descomposición de $\mathbb{C}[G]$ del teorema de Peter-Weyl.

Respuesta: $e = \sum_{\pi \in \hat{G}} \left(\frac{d_\pi}{\#G}\right) \chi_\pi$.

→**4.10.** Encuentra todos los idempotentes de $\mathbb{C}[G]$, para $G = \mathbb{Z}_N$ y $G = S_3$. Decide cuales son primitivos.

→**4.11.** Sea $\rho : G \to GL(V)$ una representación de un grupo finito, $U \subset \mathbb{C}[G]$ un sub espacio invariante e irreducible bajo translaciones por la izquierda y $u \in U$ el idempotente asociado. Sea $B = Z(\rho(G), \mathrm{End}(V))$. Demuestra que $\rho(u)V$ es un subespacio invariante e irreducible bajo B, cuya dimensión es la multiplicidad de U en V.

Sugerencia: encontrar un isomorfismo B-equivariante $\rho(u)V \cong \mathrm{Hom}_G(U, V)$.

(En construcción. Actualizado: 25 de abril, 2008).