Examen Final

1. Sea A la matriz n por n cuya entrada ij es $a_{ij} = i + j$.
   a) Encuentra la nulidad y el rango de A.
   b) Encuentra bases para el kernel y la imagen de A.
   c) Encuentra el conjunto de soluciones al sistema de n ecuaciones $\sum_j a_{ij}x_j = i$, $i = 1, 2, 3, \ldots, n$.
   d) Cierto o Falso: A es una matriz positiva definida.
   e) Para $n = 3$, encuentra una matriz invertible P tal que PAP^t es diagonal.

2. *a*) Sean V, W dos espacios vectoriales y $\{v_1, \ldots, v_n\} \subset V$ una base. Demuestra que para cada n vectores $w_1, \ldots, w_n \in W$ existe una única tranformación lineal $T : V \to W$ tal que $T(v_i) = w_i$, $i = 1, \ldots, n$.

   b) Sea V el espacio de polinomios con coeficientes reales de una variable x de grado ≤ 3. Sea $T : V \to V$ la transformación lineal tal que $T(1) = 1$, $T((x + 1)^k) = x^k + 1$, $k = 1, 2, 3$. Encuentra la matriz de T con respecto a la base $1, x, x^2, x^3$.

3. Demuestra que en un esapcio vectorial de dimensión finita todas las bases tienen el mismo número de elementos.

4. Sea V un espacio vectorial de dimensión finita, $T : V \to V$ una transformación lineal y A la matriz que representa a T con respecto a una base en V. Demuestra que
   a) $\det(A)$ solo depende de T (y no de la base que se escogió para definir A).
   b) T es invertible si y solo si $\det(A) \neq 0$.