

## Exámen parcial 2

Viernes, 22 mayo, 2009

1. (20 pts) Encuentra una base para el espacio de soluciones del sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x + 2y + 3z + 4w = 0 \\ 5x + 6y + 7z + 8w = 0 \end{cases}$$

2. (20 pts) Sea  $V$  un espacio vectorial de dimensión finita y  $T : V \rightarrow V$  una transformación lineal. Demuestra que  $T$  es invertible si y solo si para cada conjunto de vectores linealmente independiente  $\{v_1, \dots, v_k\} \subset V$ ,  $\{Tv_1, \dots, Tv_k\}$  es linealmente independiente.

3. (60 pts) Sea  $V \subset \mathbb{R}[x]$  el espacio de polinomios de grado  $\leq 3$ . Sea  $D : V \rightarrow V$  la derivada,  $D : p(x) \mapsto p'(x)$ .

- a) Encuentra una base para el kernel y la imagen de  $D$ .
- b) Encuentra los valores de  $\lambda \in \mathbb{R}$  para los cuales  $D - \lambda I$  es invertible, y para tales valores encuentra la inversa. (Nota:  $I$  es la transformación identidad  $V \rightarrow V$ ).
- c) Encuentra los valores propios de  $D$  y sus vectores propios asociados.
- d) Encuentra las matrices  $A, B$  que representan a  $D$  con respecto a las bases (a)  $\{1, x, x^2, x^3\}$  (para A), (b)  $\{1, 1 + x, 1 + x + x^2, 1 + x + x^2 + x^3\}$  (para B).
- e) Encuentra una matriz  $4 \times 4$  invertible  $P$  tal que  $A = PBP^{-1}$ , donde  $A, B$  son las matrices del inciso anterior.
- f) Cierto o Falso:  $D$  es diagonalizable.