Problemas para la preparación del examen final

1. Sea V un espacio vectorial de dimensión n con dos bases $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ y $B' = \{v'_1, \ldots, v'_n\}$, tal que $v'_j = \sum_{i=1}^n a_{ij} v_i$, $j = 1, \ldots, n$, y donde los a_{ij} son escalares en F. Expresa la matriz de una transformación lineal $T : V \to V$ con respecto a B' en términos de la matriz de T con respecto a B y la matriz de cambio de base $A = (a_{ij})$.
2. Sea V un espacio vectorial con una base $B = \{v_1, v_2, v_3\}$. Sea $B' = \{v'_1, v'_2, v'_3\}$, donde $v'_1 = v_1$, $v'_2 = v_1 + v_2$, $v'_3 = v_1 + v_2 + v_3$.
   a) Demuestra que B' es tambien una base de V.
   b) Expresa las coordenadas respecto a B' de un vector $v \in V$ en términos de sus coordenadas con respecto a la base B.
   c) Expresa las coordenadas respecto a B de un vector $v \in V$ en términos de sus coordenas con respecto a la base B'.
3. Sean V, W dos espacios vectoriales y $\{v_1, \ldots, v_n\} \subset V$ una base. Demuestra que para cada n vectores $w_1, \ldots, w_n \in W$ existe una única tranformación lineal $T : V \to W$ tal que $T(v_i) = w_i$, $i = 1, \ldots, n$.
4. En un esapcio vectorial de dimesnión finita todas las bases tienen el mismo número de elementos.
5. Sean V, W dos espacios vectoriales de dimensión n, m (resp.). Encuentra la dimensión del espacio de las transformaciones lineales $V \to W$.
6. Sean $W_1, W_2 \subset V$ dos subespacios vectoriales. Demuestra que
   a) $W_1 \cap W_2$ y $W_1 + W_2 := \{w_1 + w_2 \,|\, w_1 \in W_1, w_2 \in W_2\}$ son sub-espacios vectoriales de V.
   b) $\dim(W_1 + W_2) = \dim(W_1) + \dim(W_2) - \dim(W_1 \cap W_2)$.
7. Sea V un espacio vectorial de dimesnión 10. Encuentra el máximo número natural n tal que para cada par de subespacios de V de dimensión 7, su intersección tiene dimensión $\geq n$.
8. Considera un sistema de m ecuaciones lineales no-homogeneas con $m+k$ incognitas, $\sum_{j=1}^{m+k} a_{ij} x_j = b_j$, $j = 1, \ldots, m$, tal que las m filas de la matriz de coeficientes (a_{ij}) son linealmente independientes y $(b_1, \ldots, b_m) \neq 0$. Demuestra que existen $k+1$ vectores linealmente independientes $v_1, \ldots, v_{k+1} \in F^{m+k}$ tal que $v \in F^{m+k}$ es una solución del sistema si y solo si es de la forma $c_1 v_1 + \ldots + c_k v_k + v_{k+1}$, donde las $c_1, \ldots, c_k$ son escalares arbitrarios en F.
9. En cualquier matriz A, el máximo número de filas de A que son linealmente independientes (el "rango de filas" de A) es igual al máximo número de columnas de A que son linealmente independientes (el "rango de columnas" de A).
10. Si $W \subset V$ es un subespacio entonces $\dim(W) \leq \dim(V)$.
11. Sea $T : V \to V$ una transformación lineal y A la matriz que representa T con respecto a una base en V. Demuestra que los siguienes incisos son equivalentes:
    a) T es invertible.
    b) T es injectiva.
    c) T es suprayectiva.
    d) $\det(A) \neq 0$.
    e) T^2 es invertible.
    f) A es invertible.
    g) A^t (la transpuesta de A) es invertible.
    h) Las filas de A son linealmente independientes.
    i) Las columnas de A son linealmente indpendientes.
12. Sea A la matriz n por n cuya entrada ij es $a_{ij} = i + j$.
    a) Encuentra la nulidad y el rango de A.
    b) Encuentra bases para el kernel y la imagen de A.
    c) Encuentra una matriz diagonal y una matriz invertible P tal que $PAP^{-1} = D$.
    d) Encuentra el conjunto de soluciones al sistema de n ecuaciones $\sum_j a_{ij} x_j = i$, $i = 1, 2, 3, \ldots, n$.
    e) Encuentra los valores propios de A y sus vectores propios asociados.
13. Encuentra el conjunto de soluciones a la ecuación $x_1 + \ldots + x_n = 1$.

14. Sean $S : V \to W$ y $T : V \to W$ dos transformaciones lineales. Demuestra que los siguientes incisos son equivalentes
    a) Existen bases en V y W tal que las matrices que representan a S y T coinciden (distintas bases, posiblemente, para T y S).
    b) Existen transformaciones lineales invertibles $P : V \to V$ y $Q : W \to W$ tal que $QT = SP$.
    c) T y S tienen el mismo rango.
15. Sean V y W dos espacios vectoriales de la misma dimension (sobre el mismo campo). Demuestra que V y W son isomorfos (=existe una transformación lineal invertible $V \to W$).
16. Sea V el espacio vectorial de todas las funciones polinomiales $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de grado $\leq n$.
    a) Encuentra la dimension de V.
    b) Encuentra el kernel y la imagen de la transformación lineal $D : V \to V$ que manda un polinomio en V a su derivada.
    c) Escribe la matriz de D con respecto a tu base favorita de V.
    d) Repite los dos incisos anteriores para la transformación lineal $T_a : V \to V$ que manda un polinomio $p(x)$ al polinomo $p(x + a)$, donde $a \in \mathbb{R}$.
    e) Repite los incisos (b) y (c) para la transformación lineal $V \to V$ que manda un polinomio $p(x)$ al polinomo $q(x) = \int_x^{x+1} p(t)dt$. (Hay que demostrar también que $q(x)$ es un elemento de V).
    f) Fijamos $n+1$ números reales distintos $x_0, x_1, \ldots, x_n$. Demuestra que para cada $i = 0, 1, \ldots, n$ existe un único $p_i \in V$ tal que $p_i(x_i) = 1$ y $p_i(x_j) = 0$ para todo $j \neq i$.
    g) Demuestra que el conjunto $\{p_0, \ldots, p_n\}$ del inciso anterior es una base de V.
    h) Encuentra las coordenadas de un elemento $p(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n \in V$ con respecto a la base del inciso anterior en términos de los coeficientes $a_0, \ldots, a_n$.
17. Demuestra que una matriz de 2×2
$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$
    es invertible si y solo si $\det(A) = ad - bc \neq 0$. En caso que sea invertible encuentra su inversa.
18. Encuentra un conjunto infinito de funciones continuas $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que es linealmente independiente (sobre $\mathbb{R}$).
19. Se dice que dos transformaciones lineales $T, S : V \to V$ son similares si existe un isomorfismo $P : V \to V$ tal que $T = PSP^{-1}$.
    a) Demuestra que similitud es una relación de equivalencia (reflexiva, simetrica, transitiva).
    b) Demuestra que T y S son similares si y solo si existen bases B y B' de V tal que $[T]_B = [S]_{B'}$ (o sea, T y S tienen la misma matrix, con respecto a las bases B y B' resp.)
20. Demuestra que para toda matriz cuadrada A, $det(A) = det(A^t)$.
21. Demuestra que la determinante de la matriz
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ x_0 & x_1 & \ldots & x_n \\ x_0^2 & x_1^2 & \ldots & x_n^2 \\ \vdots & & & \vdots \\ x_0^n & x_1^n & \ldots & x_n^n \end{pmatrix}$$
    es $\Pi_{i<j}(x_j - x_i)$ (el producto de todas las diferencias $x_j - x_i$, donde $0 \leq i < j \leq n$).

    Por ejemplo, para $n = 2$,
$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_0 & x_1 & x_2 \\ x_0^2 & x_1^2 & x_2^2 \end{pmatrix} = (x_2 - x_1)(x_2 - x_0)(x_1 - x_0).$$