Examen Final

9 dic, 2009

NOTAS:

1. Todos los espacios vectoriales son de dimensión finita.

2. $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{C}^n$ que aparecen en los incisos están considrerados con su estructura euclidieana y hermitiana (resp.) canónica.

PARTE A *(60 puntos)*

Hay que responder a cada inciso con "Cierto" o "Falso". Después, en caso de "Falso", solo hay que dar un contraejemplo (o demostrar que tal contra ejemplo existe); en caso de "Cierto" hay que dar una explicación **breve**, *no demostración completa (por ejemplo, mencionar un resultado visto en el curso que implica el inciso).*

1. Para todo operador ortogonal T en $\mathbb{R}^n$, $\det(T) = 1$.
2. Todo operador invertible en $\mathbb{C}^2$ es diagonalizable.
3. Si una matriz 2×2 con entradas reales es diagonalizable en $Mat_{2\times 2}(\mathbb{C})$ entonces es diagonalizable en $Mat_{2\times 2}(\mathbb{R})$.
4. Si $A \in Mat_{n\times n}(\mathbb{R})$ y $p(x) \in \mathbb{R}[x]$ tal que $p(A) = 0$, entonces el polinomio característico de A divide a $p(x)$.
5. Un operador lineal es diagonalizable ssi su polinomio mínimo coincide con su polinomio característico.
6. Para un operador nilpotente, el polinomio mínimo coincide con su polinomio característico.
7. $99x^2 + 20xy + y^2 \geq 0$ para todo $x, y \in \mathbb{R}$.
8. Existe un polinomio $q(x) \in \mathbb{R}[x]$ de grado ≤ 7 tal que para todo polinomio $p(x) \in \mathbb{R}[x]$ de grado ≤ 7
$$\int_1^2 p(x)q(x)dx = 3p(4) + \int_5^6 p(x)dx.$$
9. Existe una matriz ortogonal 5×5 cuya segunda fila es $(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$.
10. Si T es un operador lineal en $\mathbb{R}^n$ con un subespacio invariante $U \subset \mathbb{R}^n$, entonces $U^\perp$ es T^*-invariante.
11. La suma de operadores nilpotentes es nilpotente.
12. La suma directa de operadores nilpotentes es nilpotente.
13. Todo operador lineal en $\mathbb{R}^7$ admite un subespacio invariante de dimensión mayor que 1 y menor que 7.
14. La matriz de un operador autoadjunto en $\mathbb{R}^7$ con respecto a cualquier base es simétrica.
15. Si $T : \mathbb{R}^7 \to \mathbb{R}^7$ es un operador autoadjunto y $V_1 \subset \mathbb{R}^7$ es un subespacio T-invariante, entonces existe un subespacio T-invariante $V_2 \subset \mathbb{R}^7$ tal que $\mathbb{R}^7$ es la suma directa de V_1 y V_2.

16. Un operador lineal con polinomio característico $x(x^2-1)$ es diagonalizable.
17. Un operador lineal con polinomio mínimo $x(x^2-1)$ es diagonalizable.
18. Existe un producto hermitiano en $\mathbb{C}^2$ tal que $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & i \end{pmatrix}$ es autoadjunto.
19. Un operador $T : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ que satisface $T^3 = T$ es diagonalizable. (Sugerencia: $x^3 - x = x(x-1)(x+1)$.)
20. Si $T : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^5$ satisface $T^{25} = 0$ entonces $T^5 = 0$.

PARTE B *(20 puntos)*

Sean $a, b \in \mathbb{R}$, y sea A la matriz $n \times n$ con entradas

$$a_{ij} = \begin{cases} a & i = j \\ b & i \neq j \end{cases}, \qquad 1 \leq i, j \leq n.$$

1. Demuestra: $\lambda = a - b$ es un valor propio de A.
2. Encuentra una base ortonormal para el espacio propio de A correspondiente al valor propio $a - b$.
3. Encuentra una matriz ortogonal P tal que PAP^{-1} es diagonal.
4. Encuentra los valores de a, b tal que A es positiva definida.

PARTE C *(20 puntos)*

Sea $V \in \mathbb{R}[x]$ el subespacio de polinomio de grado $\leq d$. Sea $p_k(x) = \sum_{i=0}^{k} x^i$, $k = 0, 1, 2, \ldots, d$.

1. Demuestra que existe un único producto escalar en V tal que $\{p_0, \ldots, p_d\}$ es una base ortonormal.
2. Encuentra el producto escalar $\langle x^i, x^j \rangle$, $0 \leq i, j \leq d$, según el producto escalar del inciso anterior.
3. Sean k, l dos enteros en el rango $0 \leq k, l \leq d$. Encuentra la proyección orthogonal (según el producto escalar del primer inciso) de x^l sobre el subespacio generado por $1, x, \ldots, x^k$.