Material para el examen final

Definiciones:

Hay que saber las definiciones precisas y conocer ejemplos concretos de todos los términos que aparecieron en el material del primer (y único...) examen parcial, más los siguientes términos:

Ideal de un anillo, ideal principal. El polinomio mínimo de un operador lineal, la forma de Jordan de un operador, la descomposición primaria de un operador, operador nilpotente y su índice, operador auto-adjunto/oertogonal/unitario, forma bilineal simétrica/anti-simétrica/simpléctica, forma cuadrática, forma cuadrática positiva definida.

Teoremas:

Hay que saber las demostraciones de los siguientes teoremas y sus corolorios.

1. Todo operador nilpotente es la suma directa de operadores nilpotentes estándar. El número de los sumandos y sus índices se determina de manera única por el operador.
2. Todo operador en espacio vectorial complejo es la suma directa de bloques de Jordan (múltiplo de la identidad más nilpotente estándar). El número de los bloques y sus tama nos se detrmina de manera única por el operador.
3. Todo ideal en el anillo de los polinomios en una variable es principal.
4. El teorema de Cayley-Hamilton (todo operador lineal está anulado por su polinomio característico).

Problemas:

Todos los espacios vectoriales son de dimensión finita.

Parte I. Existe o no existe?

Para cada uno de los incisos siguientes, encuentra un ejemplo que satisface la descripción dada, o demuestra que tal objeto no existe.

1. Un operador lineal en $\mathbb{R}^3$ cuyo polinomio mínimo es (a) λ; (b) λ^2; (c) λ^3; (d) λ^4; (e) λ^2+1.
2. Un operador hermitiano en $\mathbb{C}^3$ cuyo polinomio mínimo es (a) λ^3+1; (b) λ^2+1;
3. Dos operadores lineales no conjugados en $\mathbb{R}^3$ cuyo polinomio mínimo es λ^2.
4. Operador nilpotente en $\mathbb{R}^7$ con índice $=5$.
5. Operador nilpotente en $\mathbb{R}^5$ con índice $=7$.
6. Un operador unitario en $\mathbb{C}^3$ que manda (a) el vector $(1,0,0)$ al vector (i,i,i); (b) el vector $(1+i,1-i,0)$ al vector $(0,0,2)$.
7. Un operador hermitiano en $\mathbb{C}^3$ que manda el vector $(1,0,0)$ al vector (i,i,i).
8. Un operador no diagonalizable en $\mathbb{R}^3$.
9. Un operador lineal T en $\mathbb{R}^5$ tal que $T^5=I$ y que tiene el valor propio $\lambda=2$.
10. Una matriz diagonal $D \in Mat_{2\times 2}(\mathbb{C})$ que es similar a la matriz $\begin{pmatrix} 1 & i \\ i & -1 \end{pmatrix}$.

11. Un operador lineal T en $\mathbb{R}^9$ tal que $T^2 = -I$.
12. Un operador lineal unitario T no diagonalizable en $\mathbb{C}^5$.
13. Un operador lineal T no diagonalizable en $\mathbb{C}^5$ tal que $T^5 = I$.
14. Dos operadores lineales A, B en $\mathbb{C}^5$ tal que $AB - BA = I$.
15. Una matriz $A \in Mat_{7\times 7}(\mathbb{R})$ tal que $A^3 + 3A^2 + 3A = 7I$ y tal que A no satisface una ecuación polinomial de grado menor que 3.
16. Un producto escalar en $\mathbb{R}^2$ tal que $x^2 + 2xy + 3y^2 = 4$ es un círculo.
17. Un producto escalar en $\mathbb{R}^2$ tal que $\|(x, y)\| = |x| + |y|$ para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.
18. Un operador lineal en $\mathbb{R}^3$ cuyo polinomio mínimo es $1 + \lambda + \lambda^2$.
19. Un operador nilpotente invertible en $\mathbb{C}^7$.
20. Un subespacio 1-dimensional de $\mathbb{C}^3$ ortogonal a $(1, i, 1 + i)$ y $(1 + i, 1, i)$.
21. El residuo de la división de (a) $x^4 + 1$ entre $x + 2$, (b) $x^4 - 1$ entre $x + 1$.
22. El conjunto de polinomios que anula la matriz del inciso 10.
23. La proyección ortogonal del vector $(1, i, 1 + i)$ sobre el complemento ortogonal de $(1 + i, 1, i)$.
24. Un cambio de coordenadas ortogonal $(X, Y, Z) \mapsto (x, y, z)$ que diagonaliza la forma cuadrática $x^2 + y^2 + z^2 + xy + yz + zx$.
25. La matriz, con respecto a la base canónica de $\mathbb{R}^4$, de la proyección ortogonal $\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ sobre el subespacio $W \subset \mathbb{R}^4$ generado por los vectores $(1, 2, 3, 4)$ y $(5, 6, 7, 8)$.
26. Una transformación lineal $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ cuyo kernel está generado por $(1, 2, 3)$, $(4, 5, 6)$.
27. Una transformación lineal $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ cuya imagen está generada por $(1, 2, 3)$, $(4, 5, 6)$.
28. Una matriz A, 3×3 con entradas reales, tal que $A^{2010} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 3 & 5 & 3 \\ 5 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

Parte II.

1. Sea $V \subset \mathbb{R}[x]$ el subespacio de polinomios de grado $\leq n$. Sean $x_0, x_1, \ldots, x_n$ números reales distintos. Para cada $i = 0, 1, 2, \ldots, n$ sea $\alpha_i \in V^*$ dado por $\alpha_i(p) = p(x_i)$. Demuestra que $\alpha_0, \ldots, \alpha_n$ es una base de V^* y encuentra su base dual (una base $p_0, \ldots, p_n$ de V que satisface $\alpha_i(p_j) = \delta_{ij}$).
2. Sea A una matriz 2×2 con entradas complejas a_{ij}. Dados dos vectores $v = (z_1, z_2), v' = (z'_1, z'_2) \in \mathbb{C}^2$ definimos $\langle v, v' \rangle = \sum a_{ij} \bar{z}_i z'_j$.
   a) Demuestra que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ es un producto interior (hermitiano) en $\mathbb{C}^2$ ssi (1) $A = \overline{A}^t$, (2) $a_{11} > 0$, (3) $\det A > 0$.
   b) Sea
   $$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 + i \\ 1 - i & 5 \end{pmatrix}.$$
   Verifique que A satisface las condiciones del inciso anterior y calcula $\langle (1, 2), (3, 4) \rangle$ y $\|(2, 5i)\|$.
3. Sea V el espacio de polinomios en una variable con coeficientes reales de grado ≤ 3.

a) Demuestra que

$$\langle p, q\rangle = \int_{-1}^{1} p(x)q(x)dx$$

es un producto escalar en V.

b) Encuentra una base ortonormal de V aplicando el proceso de Gram-Schmidt a la base $\{1, x, x^2, x^3\}$.

4. Demuestra: si q_1, q_2 son dos formas cuadráticas en $\mathbb{R}^n$, con $q_1 > 0$ (positiva definida), entonces son simultáneamente diagonalizables. Es decir, existe una base de $\mathbb{R}^n$ y constantes $a_1, \ldots, a_n$, $b_1, \ldots, b_n \in \mathbb{R}$ tal que para todo $v \in \mathbb{R}^n$, $q_1(v) = \sum a_i x_i^2$, $q_2(v) = \sum b_i x_i^2$, donde $x_1, \ldots, x_n$ son las coordenadas de v con respecto a la base.

   *Reto: averigua si el inciso sigue siendo cierto sin la condición que una de las dos formas cuadráticas es positiva definida.

5. Decide si la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 & 0 & 0 \\ 7 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

   es diagonalizable en $Mat_{5\times 5}(\mathbb{C})$. Nota: en caso que la matriz es diagonalizable, no tienes que diagonalizarla para demostrarlo!

6. Sea T un operador lineal en un espacio vectorial V sobre un campo k. Demuestra los siguientes incisos:
   a) Si T es diagonalizable entonces T^2 tambien es diagonalizable.

   b) Si T es diagonalizable y $p(x) \in k[x]$ entonces $p(T)$ tambien es diagonalizable.

   c) Si T^2 es diagonalizable, T es invertible y $k = \mathbb{C}$ entonces T es diagonalizable.

   d) Encuentra un contra-ejemplo al inciso anterior quitando la condición "T es invertible".

7. Encuentra todas las posibilidades para la forma canónica de Jordan de una matriz cuadrada cuyo polinomio caracterstico es $(\lambda-1)^6(\lambda-2)^4(\lambda-4)^5$ y su polinomio mínimo es $(\lambda-1)^3(\lambda-2)^2(\lambda-4)^4$.

8. Encuentra una matriz ortogonal 4×4 P tal que PAP^{-1} es diagonal, donde

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

9. *a*) Sea A una matriz $n \times n$ que tiene la siguiente forma en blockes:

$$A = \begin{pmatrix} B & C \\ 0 & D \end{pmatrix},$$

   donde B es una matriz $k\times k$, C una matrix $k\times(n-k)$ y D una matriz $(n-k)\times(n-k)$. Demuestra que $\det(A) = \det(B)\det(D)$.

b) Usa el inciso anterior para dar una demostrtación del teorema de Cayley Hamilton para un operador lineal en un espacio vectorial complejo.

Sugerencia: usa inducción sobre la dimensión. Para el paso de la inducción, tomamos un operador lineal en un espacio vectorial (complejo) de dimensión n. Sea v_1 un vector propio de T, asociado a un valor propio λ_1, y completalo a una base. Sea A la matriz de T con respecto a esta base. Entonces A tiene la forma de la matriz del inciso anterior (con $k = 1$). Concluye que el polinomio característico de T es $(\lambda - \lambda_1)q(\lambda)$, donde $q(\lambda)$ es el polinomio característico de D. Ahora aplica la suposición de la inducción a D.

10. Sea U un espacio vectorial real de dimensión n y sea $V = U \oplus U^*$. Sea $\Omega : V \times V \to \mathbb{R}$ dada por $\Omega((\alpha, v), (\alpha', v')) = \alpha(v') - \alpha'(v)$. Demuestra que U es una forma simpléctica en V (forma bilineal anti-simétrica no degenerada).

11. Sea $\langle , \rangle$ un producto escalar en $\mathbb{R}^n$ y sea $B = \{v \in \mathbb{R}^n | \|v\| \leq 1\}$ ("la bola unitaria cerrada"). Demuestra que B es
    a) *Convexa*: si $v_1, v_2 \in B$ entonces $tv_1 + (1-t)v_2 \in B$ para todo $t \in [0, 1]$.
    b) *Estrictamente convexa*: si $v_1, v_2 \in B$ entonces $tv_1 + (1-t)v_2 \in B$ para todo $t \in [0, 1]$ y $tv_1 + (1-t)v_2 \in intB = \{v \in \mathbb{R}^n | \|v\| < 1\}$ para $t \in (0, 1)$.

12. Sea $T : U \to V$ una transformación lineal entre espacios euclideanos (espacios vectoriales reales, de dimensión finita, con producto escalar). Demustra que T es inyectiva ssi T^* es suprayectiva.

13. Encuentra los valores $b_1, b_2, b_3, b_4 \in \mathbb{R}$ para los cuales el sistema de ecuaciones

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcrcrcl} 5x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & + & 2x_4 & + & x_5 & = & b_1 \\ x_1 & & & + & x_3 & + & x_4 & & & = & b_2 \\ 7x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & + & x_4 & + & 2x_5 & = & b_3 \\ -x_1 & - & x_2 & + & x_3 & + & 2x_4 & - & x_5 & = & b_4 \end{array} \right.$$

tiene (a) solución (b) solución única.

14. Sea T un operador lineal en un espacio vectorial complejo tal que $T^k = I$ para algun k natural. Demuestra que T es diagonalizable.

15. *(Opcional) La descomposición polar de un operador lineal: toda matriz $n \times n$ con entradas complejas A se puede escribir como un producto $A = PU$, donde P es una matriz hermítica positiva (positiva definida si A es invertible) y U es una matriz unitaria. Unicidad: la P es única y la U es única si A es invertible.

Sugerencia: defines $Q = \overline{A}^t A$ y demuestras que es hermítica positiva. Luego existe una única matriz hermítica positiva P tal que $P^2 = Q$ (puedes diagonalizar Q, luego tomar las raízces cuadradas no-negativas de los valores propios y mantener los mismos vectores propios). Luego, cuando A es invertible, defines $U = P^{-1}A$ y demuestras que es unitaria.

Nota: el caso $n = 1$ se reduce a la descomposición polar usual de un número complejo, $z = re^{i\theta}$.