Examen parcial 1

(17 oct, 2009)

Todos los espacios vectoriales son de dimensión finita.

1. Sea $\{v_1, \ldots, v_k\}$ un conjunto ortonormal en un espacio euclideano V (no necesariamente una base). Demuestra que para todo $v \in V$, $\sum_{i=1}^{k} |\langle v, v_i\rangle|^2 \leq \|v\|^2$, con igualdad ssi v pertenece al subespacio generado por $\{v_1, \ldots, v_k\}$.

2. Sean $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ valores propios *distintos* de un operador lineal T en un espacio vectorial V, con vectores propios asociados $v_1, \ldots, v_k$ (es decir, los v_i son vectores no nulos y $Tv_i = \lambda_i v_i$, $i = 1, \ldots, k$). Demuestra que $v_1, \ldots, v_k$ son linealmente independientes.

3. Sea T una transformación lineal entre espacios euclideanos (o hermitianos). Demuestra que la imagen de T es el complemento ortogonal del kernel de la adjunta de T.

4. Sea L el espacio de las matrices 3×3 con entradas reales y $V \subset L$ el conjunto de las matrices antisimétricas.

   a) Demuestra que V es un subespacio vectorial de L de dimensión 3.

   b) Para dos elementos $A, B \in L$ se define $\langle A, B\rangle = \operatorname{tr}(AB^t)$. Demuestra que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ es un producto escalar en L.

   Nota: en los siguientes 3 incisos se usa este producto escalar.

   c) Encuentra una base ortonormal para V y completala a una base ortonormal de L.

   d) Para cada $A \in V$ se define el operador lineal $T_A : V \to V$ por $T_A(B) = AB - BA$. Demuestra que T_A es antisimétrico.

   e) Sean $a, b, c \in \mathbb{R}$ y
   $$A = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{pmatrix}.$$
   Encuentra los valores y vectores propios de la complexificación de T_A en términos de a, b, c.