Examen parcial 1 – soluciones

(17 oct, 2009)

Todos los espacios vectoriales son de dimensión finita.

1. Sea $\{v_1, \ldots, v_k\}$ un conjunto ortonormal en un espacio euclideano V (no necesariamente una base). Demuestra que para todo $v \in V$, $\sum_{i=1}^k |\langle v, v_i\rangle|^2 \leq \|v\|^2$, con igualdad ssi v pertenece al subespacio generado por $\{v_1, \ldots, v_k\}$.

   $\triangleright$ Veremos dos demostraciones. La primera usa el proceso de Gram-Schmidt para completar el conjunto ortonormal a una base ortonormal $\{v_1, \ldots, v_k, \ldots, v_n\}$. Si $v = \sum_{i=1}^n c_i v_i$ entonces $\langle v, v_j\rangle = \sum_{i=1}^n c_i\langle v_i, v_j\rangle = \sum_{i=1}^n c_i\delta_{ij} = c_j$, por lo que $v = \sum_{i=1}^n\langle v, v_i\rangle v_i$ y $\|v\|^2 = \sum_{i=1}^n\langle v, v_i\rangle^2 \geq \sum_{i=1}^k\langle v, v_i\rangle^2$. Tenemos igualdad en la última desigualdad ssi $\sum_{i=k+1}^n\langle v, v_i\rangle^2 = 0$, o sea $v = \sum_{i=1}^k\langle v, v_i\rangle v_i$ así que v pertenece al subespacio generado por los $\{v_1, \ldots, v_k\}$.

   La segunda demostración es más elemental (e ingeniosa). Considramos el vector $v' = v - \sum_{i=1}^k\langle v, v_i\rangle v_i$. Entonces $0 \leq \|v'\|^2 = \|v\|^2 - 2\langle v, \sum_{i=1}^k\langle v, v_i\rangle v_i\rangle + \|\sum_{i=1}^k\langle v, v_i\rangle v_i\|^2 = \|v\|^2 - 2\sum_{i=1}^k\langle v, v_i\rangle^2 + \sum_{i=1}^k\langle v, v_i\rangle^2 = \|v\|^2 - \sum_{i=1}^k\langle v, v_i\rangle^2$, así que $\|v\|^2 \geq \sum_{i=1}^k\langle v, v_i\rangle^2$. Si tenemos igualdad entonces $v' = 0$, o sea $v = \sum_{i=1}^k\langle v, v_i\rangle v_i$, lo cual está en el espacio generado por los $v_1, \ldots, v_k$. Si v está en el espacio generado por los $v_1, \ldots, v_k$ entonces $v = \sum_{i=1}^k c_i v_i$, para algunos escalares $c_1, \ldots, c_k$. Tomando el producto interior de la última ecuación con v_j se obtiene $c_j = \langle v, v_j\rangle$, por lo que $v = \sum_{i=1}^k\langle v, v_i\rangle v_i$. Tomando norma de ambos lados, se obtiene $\sum_{i=1}^k |\langle v, v_i\rangle|^2 = \|v\|^2$. $\square$

2. Sean $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ valores propios *distintos* de un operador lineal T en un espacio vectorial V, con vectores propios asociados $v_1, \ldots, v_k$ (es decir, los v_i son vectores no nulos y $Tv_i = \lambda_i v_i$, $i = 1, \ldots, k$). Demuestra que $v_1, \ldots, v_k$ son linealmente independientes.

   $\triangleright$ Por inducción sobre k. Para $k = 1$, $\{v_1\}$ es linealmente indepndiente ya que $v_1 \neq 0$. Suponemos ahora que $\{v_1, \ldots, v_{k-1}\}$ es linealmente independiente. Si $\sum_{i=1}^k c_i v_i = 0$ para algunos escalares $c_1, \ldots, c_k$, entonces aplicando T a esta ecuación obtenemos $\sum_{i=1}^k c_i\lambda_i v_i = 0$. Así que $0 = \left[\sum_{i=1}^k c_i\lambda_i v_i\right] - \lambda_k\left[\sum_{i=1}^k c_i v_i\right] = \sum_{i=1}^k c_i(\lambda_i - \lambda_k)v_i = \sum_{i=1}^{k-1} c_i(\lambda_i - \lambda_k)v_i$. Por inducción, $c_i(\lambda_i - \lambda_k) = 0$, $i = 1, \ldots, k-1$, por lo que $c_i = 0$, $i = 1, \ldots, k-1$. Concluimos entonces que $c_k v_k = 0$, por lo que $c_k = 0$ tambien (ya que $v_k \neq 0$). $\square$

3. Sea T una transformación lineal entre espacios euclideanos (o hermitianos). Demuestra que la imagen de T es el complemento ortogonal del kernel de la adjunta de T.

   $\triangleright$ Sea $Tv \in Im(T)$. Si $v' \in Ker(T^*)$ entonces $\langle Tv, v'\rangle = \langle v, T^*v'\rangle = \langle v, 0\rangle = 0$. Así que $Ker(T^*) \subset Im(T)^\perp$.

Para demostrar que $Im(T)^{\perp} \subset Ker(T^*)$, sea $v' \in Im(T)^{\perp}$. Entonces para todo $v \in V$, $0 = \langle v', Tv\rangle = \langle T^*v', v\rangle$. Esto implica que $T^*v' = 0$ (se puede tomar por ejemplo $v = T^*v'$). Así que $v' \in KerT^*$.

4. Sea L el espacio de las matrices 3×3 con entradas reales y $V \subset L$ el conjunto de las matrices antisimétricas.

   a) Demuestra que V es un subespacio vectorial de L de dimensión 3.

   ▷ Sea $E_{ij} \in L$ la matriz cuya entrada ij es 1 y el resto 0. Toda matriz $A \in L$ es una combinación lineal única $A = \sum_{ij} a_{ij}E_{ij}$, por lo que los E_{ij} forman una base de L. Una matriz A es antisimétrica ssi $a_{ij} = -a_{ji}$, por lo que las tres matrices $E_{ij} - E_{ji}$, $1 \leq i < j \leq 3$, forman una base de V. Así que $dimV = 3$. □

   b) Para dos elementos $A, B \in L$ se define $\langle A, B\rangle = \mathrm{tr}(AB^t)$. Demuestra que $\langle\cdot,\cdot\rangle$ es un producto escalar en L.

   ▷ Si $A = \sum_{ij} a_{ij}E_{ij}$, $B = \sum_{ij} b_{ij}E_{ij}$, entonces $\mathrm{tr}(AB^t) = \sum_{ij} a_{ij}b_{ij}$, por lo que $\langle\cdot,\cdot\rangle$ es el producto escalar "estandar" con respecto a la base de los E_{ij}. □

   Nota: en los siguientes 3 incisos se usa este producto escalar.

   c) Encuentra una base ortonormal para V y completala a una base ortonormal de L.

   ▷ Como los E_{ij} forman una base ortonormal de L, los 3 vectores $E_{ij} - E_{ji}$, $1 \leq i < j \leq 3$, forman una base ortogonal de V, cuyos elementos tienen norma $\sqrt{2}$. Así que $(E_{ij} - E_{ji})/\sqrt{2}$, $1 \leq i < j \leq 3$, forman una base ortonormal de V. Los 6 vectores $(E_{ij} + E_{ji})/\sqrt{2}$, $1 \leq i < j \leq 3$, E_{ii}, $1 \leq i \leq 3$, lo completan a una base ortonormal de L.

   Nota: los 6 vectores que agregamos es una base ortonornmal de las matrices simétricas, lo caul es el complemento ortogonal del subespacio de matrices antisimétricas (ver problema 7f de la guia de estudio de este examen).

   □

   d) Para cada $A \in V$ se define el operador lineal $T_A : V \to V$ por $T_A(B) = AB - BA$. Demuestra que T_A es antisimétrico.

   ▷ $\langle T_A(B), C\rangle = -tr[(AB - BA)C] = -tr(ABC) + tr(BAC) = -tr(BCA) + tr(BAC) = -tr[B(CA - AC)] = -\langle B, T_A(C)\rangle$. □

   e) Sean $a, b, c \in \mathbb{R}$ y
$$A = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{pmatrix}.$$
   Encuentra los valores y vectores propios de la complexificación de T_A en términos de a, b, c.

   ▷ Definimos $[A, B] = AB - BA$. Sea $v = (a, b, c)$ y $v_1 = v/\|v\|$. Sea $v_2 \in \mathbb{R}^3$ un vector unitario ortogonal a v_1. (Por ejemplo, $v_2 = (b, -a, 0)/\sqrt{a^2 + b^2}$, o $v_2 = (1, 0, 0)$ en caso que $a = b = 0$). Sea $v_3 = v_1 \times v_2$. Entonces $v_1 = v_2 \times v_3$, $v_2 = v_3 \times v_1$. Luego, si $A_1, A_2, A_3 \in V$ son los operadores asociados, tenemos que $[A_1, A_2] = -A_3$, $[A_2, A_3] = -A_1$, $[A_3, A_1] = -A_2$.

(Comparar con problema 13e de la guia de estudios para el examen. El cambio de signo es porque la manera de parametrizar el A con a, b, c en este problema es diferente un poco de la manera que se hace en problema 13c de la guia, desafortunadamente).

En consecuancia, $T_A(A_2 + iA_3) = \|v\|[A_1, A_2 + iA_3] = \|v\|(-A_3 + iA_2) = i\|v\|(A_2 + iA_3)$, así que $A_2 + iA_3 \in V_{\mathbb{C}}$ es un vector propio de $(T_A)_{\mathbb{C}}$ con valor propio $i\|v\|$. De manera similar, $A_2 - iA_3$ es un vector propio asociado al valor propio $-i\|v\|$. Es claro que $T_A(A) = [A, A] = 0$, así que A es un vector propio asociado al valor propio 0.

En Resumen, tenemos que los valores propios de la complexificación de T_A son $0, \pm i\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$, y los vectores propios asociados son los múltiplos (por escalar complejo) de $A, A_2 \pm iA_3$.

Ahora claculamos: si tomamos

$$v_2 = (b, -a, 0)/\sqrt{a^2 + b^2}$$

(en el caso de $a \neq 0$ o $b \neq 0$) tenemos

$$\begin{aligned} v_3 &= v_1 \times v_2 = \frac{(a, b, c) \times (b, -a, 0)}{\sqrt{(a^2 + b^2 + c^2)(a^2 + b^2)}} \\ &= \frac{(ac, bc, -a^2 - b^2)}{\sqrt{(a^2 + b^2 + c^2)(a^2 + b^2)}} \end{aligned}$$

así que

$$A_2 \pm iA_3 = \begin{pmatrix} 0 & \alpha & \beta \\ -\alpha & 0 & \gamma \\ -\beta & -\gamma & 0 \end{pmatrix},$$

con

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \pm i \frac{ac}{\sqrt{(a^2 + b^2 + c^2)(a^2 + b^2)}}, \\ \beta &= \frac{-a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \pm i \frac{bc}{\sqrt{(a^2 + b^2 + c^2)(a^2 + b^2)}}, \\ \gamma &= \mp i \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{a^2 + b^2 + c^2}}. \end{aligned}$$

$\square$