Tarea núm. 14

Para el viernes, 20 nov 2009

Los primeros dos problemas de esta tarea son una continuación de la tarea pasada (núm. 13). Se usa toda su notación. Para los primeros dos problemas introducimos también la siguiente notación. Para cada operador lineal $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ y $p(x,y) \in V = \mathbb{R}[x,y]$ se define $\widetilde{T}(p(x,y)) = p(T(x,y))$.

1. Demuestra que
   a) $\widetilde{T}(p(x,y)) \in V$ y $\widetilde{T} : V \to V$ es un operador lineal.
   b) $\widetilde{I}$ es la identidad (de V) y $\widetilde{T_1 T_2} = \widetilde{T}_2\widetilde{T}_1$. Así que si T es invertible $\widetilde{T}$ también es invertible, con inversa $\widetilde{T^{-1}}$.
   c) Para cada $\lambda \in \mathbb{R}$ sea m_λ el operador lineal en $\mathbb{R}^2$ de multiplicación por el escalar λ. Entonces los operadores $\widetilde{m}_\lambda$ son simultáneamente diagonalizables y la descomposición $V = \bigoplus_d V_d$ es la descomposición en sus espacios propios.
   d) Cada operador lineal T en $\mathbb{R}^2$ conmuta con todos los m_λ, así que $\widetilde{T}$ conmuta con los $\widetilde{m}_\lambda$, por lo que cada V_d es $\widetilde{T}$-invariante (ver problema 4 de la tarea 12).

   Nota: se puede demostrar fácilmente este resultado directamente, pero es menos divertido.

2. Si $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ es ortogonal entonces
   a) $\widetilde{T}$ es ortogonal (con respecto al producto escalar en V definido en la tarea pasada).
   b) $\widetilde{T}$ conmuta con Δ y su adjunta (multiplicación por r^2).
   c) $\widetilde{T}$ deja invariante la descomposición $V_d = H_d \oplus r^2 H_{d-2} \oplus r^4 H_{d-4} \oplus \ldots$ (ver tarea anterior).
   d) *(Opcional) Si T es una rotación por ángulo θ entonces la acción de $\widetilde{T}$ en V_d está dada por: en H_d rotación por ángulo $d\theta$, en $r^2 H_{d-2}$ rotación por ángulo $(d-2)\theta$, etc.

3. Sea N un operador lineal nilpotente en un espacio vectorial V y suponemos que N es la suma directa de operadores nilpotentes “estándar”, $N = N_1 \oplus N_2 \oplus \ldots$.

   (Recordamos que esto significa que si $N_i : V_i \to V_i$ entonces en cada V_i existe un vector *cíclico* $v_i \in V_i$, un vector tal que sus imágenes sucesivas bajo N_i, $\{v_i, N_i v_i, N_i^2 v_i, \ldots\}$, generan a V_i.)

   Denotamos por $n(\alpha)$, $\alpha = 1, 2, 3, \ldots$, el número de los sumandos N_i de índice α.

   Demuestra que para todo $i = 0, 1, 2, \ldots$, $\dim N^i(V) = \sum_{\alpha=i+1}^{d} (\alpha - i) n(\alpha)$.

   Concluye que los números $n(\alpha)$, así como el número de los sumandos N_i y sus índices, dependen de N solamente (y no de la descomposición particular $N = N_1 \oplus N_2 \oplus \ldots$).

Nota: este ejercicio completa la clasificación de operadores nilpotentes en espacios vectoriales de dimensión finita que hemos visto en la clase y termina nuestra demostración del teorema de Jordan.

Según el teorema de Jordan, todo operador lineal en un espacio vectorial complejo de dimesnión finita se puede escribir, de manera única, como la suma (ordinaria, no directa) de dos operadores que conmutan: uno diagonalizable y el otro nilpotente. Así que la “culpa” de no poder diagonalizar un operador lineal la tiene su parte nilpotente. Esto es lo que nos motiva a estudiar la clase de operadores nilpotentes.

En la clase hemos visto que todo operador nilpotente se puede escribir como la suma directa de operadores nilpotentes "estándar". Esta descomposición en general no es única (toma el operador nulo por ejemplo), pero el número de los sumandos y sus índices sí están determinados únicamente por el operador, como demostramos en este ejercicio.

4. Para cada uno de los siguientes operadores en $\mathbb{C}^n$ (dados por su matriz en la base canónica), determina (a) su polinomio característico y mínimo, (b) su forma de Jordan, (c) una base de $\mathbb{C}^n$ en la cual la matriz del operador tiene su forma de Jordan.

$$(a)\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad (b)\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad (c)\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad (d)\begin{pmatrix} 4 & 6 & 0 \\ -3 & -5 & 0 \\ -3 & -6 & 1 \end{pmatrix},$$

$$(e)\begin{pmatrix} 5 & 9 & -2 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \qquad (f)\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$