Tarea núm. 6

Para el viernes 18 de sept 2009

1. Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la transformacion lineal dada por la matriz
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$
   - *a*) Demuestra que T es una transformación ortogonal (con respecto al producto interior estandar en $\mathbb{R}^3$).
   - *b*) Encuentra los subespacios de $\mathbb{R}^3$ invariantes bajo T.
   - *c*) Expresa a T como la suma directa de transformaciones ortogonales en subespacios de $\mathbb{R}^3$ de dimensión ≤ 2.
   - *d*) Demuestra que T es una rotación "alrededor de un eje" (subespacio de dimensión 1) y encuentra el ángulo de rotación.
   - *e*) Demuestra que toda transformación ortogonal en $\mathbb{R}^3$ con $det = 1$ es una "rotación alrededor de un eje".
   - *f*) Demuestra que toda transformación ortogonal en $\mathbb{R}^3$ con $det = -1$ es una "rotación alrededor de un eje", compuesta con una reflexión con respecto al plano ortogonal al eje.

2. Sea V un espacio euclideano (espacio vectorial real con producto interior bilineal, simétrico y positivo definido). Demuestra que dos vectores $v_1, v_2 \in V$ son orthogonales ssi $\|v_1 + v_2\|^2 = \|v_1\|^2 + \|v_2\|^2$.

3. Demustra que en un espacio hermitiano, la condición anterior de ortogonalidad es necesaria pero no suficiente. Demuestra que una condición suficiente es $\|av_1 + bv_2\|^2 = |a|^2\|v_1\|^2 + |b|^2\|v_2\|^2$ para todo $a, b \in \mathbb{C}$.

4. Toda matriz cuadrada compleja A es unitariamente equivalente a una matriz triangular: existe una matriz unitaria U tal que UAU^{-1} es triangular.

   Sugerencia. Si la matriz A es $n \times n$, basta encontrar una sucesión de subespacios invariantes $W_1 \subset W_2 \subset \ldots \subset W_{n-1} \subset \mathbb{C}^n$ tal que $\dim(W_k) = k$, $k = 1, \ldots, n-1$. W_1 es el espacio generado por un vector propio. W_{k+1} es la suma directa de W_k y el subespacio generado por un vector propio de la transformación en $W_k^\perp$ dada por A seguida por la proyección ortogonal sobre $W_k^\perp$. Luego se toma U como la transformación que manda la base canónica a una base unitaria $u_1, \ldots, u_n$ tal que $span(u_1, \ldots, u_k) = W_k$, $k = 1, \ldots, n-1$.