Algebra Moderna 2, FAMAT-UG, aug-dic, 2010

2ndo Examen final

(14 dic, 2010)

Resolver 2 de los siguientes 4 problemas (50 pts cada uno)

1. *a*) Define: un elemento primitivo de una extensión de campos K/F.
   b) Demuestra: toda extensión de un campo de característica 0 tiene un elemento primitivo.
   c) Encuentra un elemento primitivo de la extensión $\mathbb{Q}(\sqrt{10}, \sqrt{11}, \sqrt{12})/\mathbb{Q}$.

2. *a*) Define: característica de un campo.
   b) Demuestra: la característica de un campo finito es un primo p.
   c) Demuestra: un campo finito de caraterística p tiene p^n elementos, para algun entero $n > 0$.
   d) Demuestra: para todo primo p y entero $n > 0$ existe un campo con p^n elementos.
   e) Demuestra: dos campos finitos con el mismo número de elementos son isomorfos.
   f) Dar una construcción *explicita* de un campo con 81 elementos.

3. *a*) Cierto o falso: es posible construir con compas y regla un poligono regular con 17 lados.
   b) Cierto o falso: es posible construir con compas y regla un poligono regular con 18 lados.

4. *a*) Define: el grupo de Galois de una extensión de campos K/F.
   b) Define: extensión de Galois.
   c) Demuestra: si K es una extensión de Galois de un campo F de característica 0, H subgrupo del grupo de Galois de K/F, K^H el subcampo fijo por H, entonces el orden de H es el grado de la extensión K/K^H.
   d) Sea $K \subset \mathbb{C}$ el subcampo generado por $\mathbb{Q}$ y las raices del polinomio $x^7 - 7$. Cierto o Falso: existe en K un elemento de grado 21 sobre $\mathbb{Q}$.